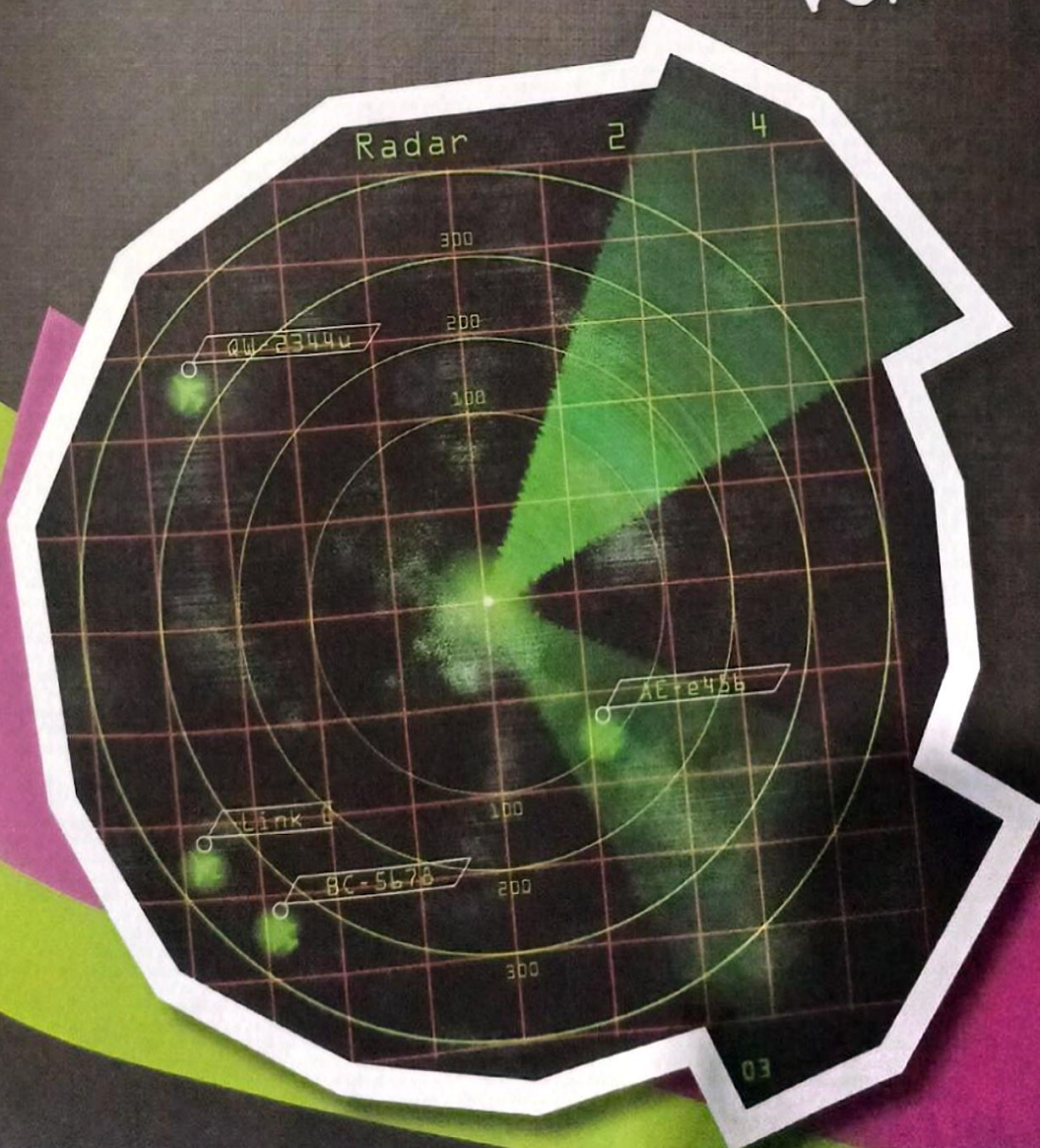


Matemática

Volume 9



Sumário

Acesse o livro digital e conheça os objetos digitais e *slides* deste volume.

21 Funções trigonométricas II 4

Função tangente	5
▪ Outras razões trigonométricas	7
Função cotangente	9
Função secante	10
Função cossecante	10
Relações trigonométricas	13

22 Transformações e equações trigonométricas 19

Seno, cosseno e tangente da adição e da subtração de arcos	20
Seno, cosseno e tangente de arcos duplos	26
Equações trigonométricas	28

23 Geometria analítica I 33

Plano cartesiano	34
▪ Distância entre dois pontos	37
▪ Ponto médio	40
▪ Área de um triângulo	43
Estudo da reta	49
▪ Equação geral da reta	49
▪ Equação reduzida da reta	53
▪ Ângulo entre retas	58
▪ Paralelismo e perpendicularidade entre retas	61
▪ Distância de ponto a reta	66

Funções trigonométricas II



Pac



©iStockphoto.com/viefern



Ponto de partida

As primeiras noções que apresentam alguma relação com a trigonometria como a conhecemos hoje surgiram no Egito e na Babilônia. Na construção das pirâmides do Egito, era essencial que a inclinação das faces laterais se mantivesse sempre igual. O cálculo dessa inclinação era feito pela razão entre o "percurso" e a "elevação", isto é, entre o afastamento da base da face oblíqua e a altura. No Papiro Rhind, que data aproximadamente de 1650 a.C., essa razão é denominada **seqt** da pirâmide.

1. A grande Pirâmide de Quéops tem base quadrada, com lados medindo 440 cúbitos e altura de 280 cúbitos. Qual é o **seqt** dessa pirâmide?
2. Qual é a relação entre o **seqt** da pirâmide e a tangente do ângulo formado entre a base e a face oblíqua?

Ao final desta unidade, é esperado que você acrescente as ideias referentes a estas novas funções ao conhecimento já adquirido sobre as funções seno e cosseno. É importante também que você incorpore as novas relações como ferramentas para simplificação de expressões e resolução de problemas envolvendo as razões trigonométricas.

Já estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na circunferência, além das funções seno e cosseno. Agora, vamos estudar a função tangente e três outras razões trigonométricas – cotangente, secante e cossecante – além das correspondentes funções.

Pág. importantes: 17, 18

Função tangente

A função trigonométrica **tangente** associa a cada número real $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ a tangente do arco de medida x radianos.

$$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$$

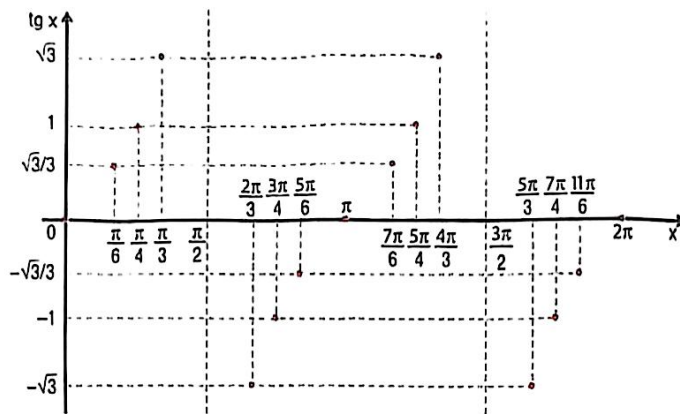
Observe que o domínio da função é restrito aos números reais para os quais $\cos x \neq 0$, pois $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Assim como fizemos para as funções seno e cosseno, ao construir o gráfico da função tangente, escolhemos alguns valores para x . Esse é um gráfico com características diferentes das apresentadas nos gráficos das funções trigonométricas estudadas anteriormente. Na tabela, alguns valores de y foram aproximados.

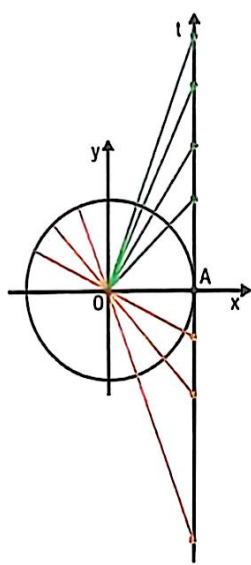
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$y = \operatorname{tg} x$	0	0,58	1	1,73	$\nexists$	-1,73	-1	-0,58	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$y = \operatorname{tg} x$	0,58	1	1,73	$\nexists$	-1,73	-1	-0,58	0

Marcamos esses pontos no plano cartesiano. Para indicar no gráfico que a tangente não existe para $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, traçamos retas verticais passando por esses valores.

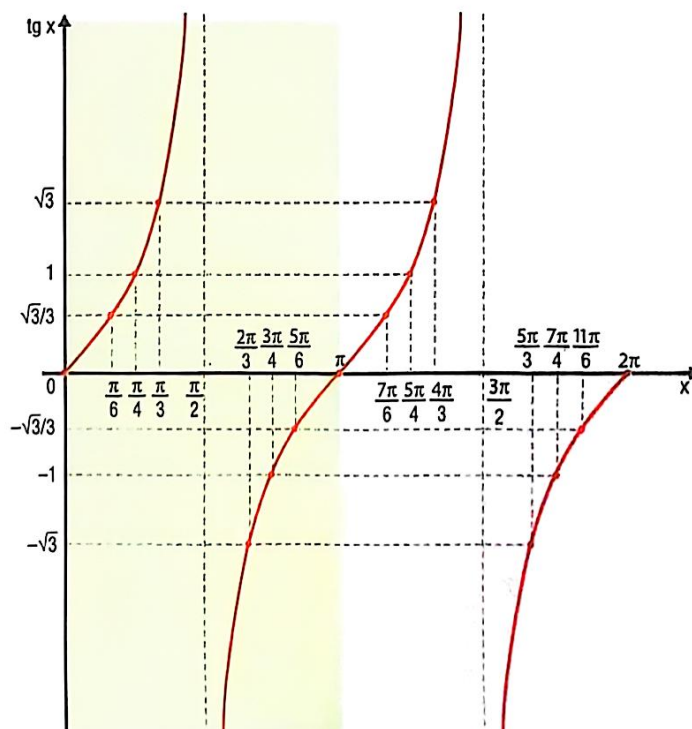


Para termos ideia de como é a curva que passa por esses pontos, vamos analisar o comportamento da tangente na circunferência trigonométrica.

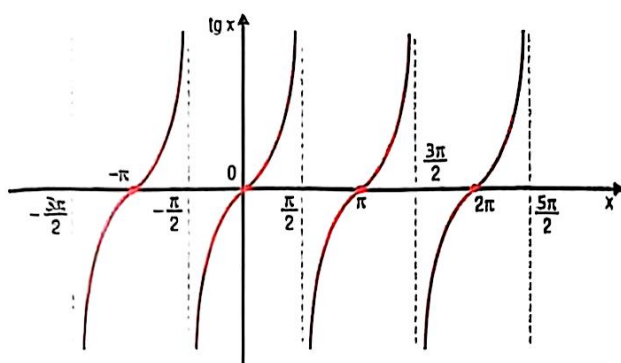


- No 1º quadrante, quanto maior for a medida do arco, maior será o valor da tangente desse arco. Assim, quanto mais próximo de $\frac{\pi}{2}$ radiano for a medida α do arco, maior será o valor da $\text{tg } \alpha$, deixando de existir para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
- No 2º quadrante, o valor da tangente aumenta até ficar igual a 0, para $\alpha = \pi$.
- No 3º quadrante, o comportamento é idêntico ao do 1º quadrante e, no 4º, ao do 2º.

Agora, podemos esboçar o gráfico da função tangente no intervalo de 0 a 2π .



Atribuindo para x também valores menores que 0 ou maiores que 2π , temos o seguinte gráfico:



As retas verticais que passam pelos pontos de abscissas da forma $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com k inteiro, são denominadas assíntotas do gráfico da função tangente. Dizemos que uma reta é uma assíntota de uma curva quando esta se aproxima cada vez mais da reta, no entanto, sem que se toque. Isso significa que a distância entre a reta e a curva tende a zero. No gráfico de uma função exponencial, o eixo das abscissas é uma assíntota horizontal e, no gráfico da função logarítmica, o eixo das ordenadas é uma assíntota vertical. No gráfico da função tangente, todas as assíntotas são verticais.

- Observe o gráfico da função tangente e responda às questões propostas.

a) Qual é o período? _____

b) Qual é o conjunto-imagem? _____

c) A função tangente é par ou ímpar? _____

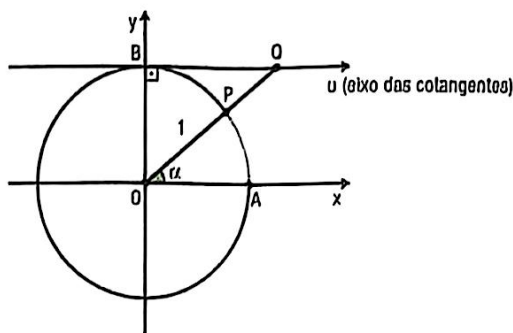
Outras razões trigonométricas

Além das razões seno, cosseno e tangente, existem outras três:

- cotangente
- secante
- cossecante

Cotangente

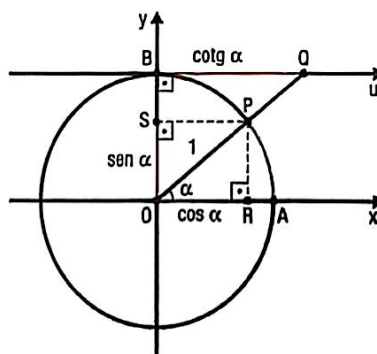
Considere uma reta u , tangente à circunferência trigonométrica no ponto $B(0, 1)$, com a mesma orientação do eixo das abscissas, denominada eixo das cotangentes.



Dado um arco $\widehat{AP}$, de medida α , considere o ponto Q , intersecção da reta OP com a reta u . A abscissa do ponto Q corresponde à cotangente de α .

Como as coordenadas do ponto B são $(0, 1)$, as coordenadas do ponto Q são $(\cotg \alpha, 1)$. Vamos mostrar uma relação que envolve a cotangente. A demonstração completa pode ser dividida em três casos: um deles quando o arco $\widehat{AP}$ tem extremidade P no 1º quadrante; outro quando a extremidade do arco pertence a um dos eixos coordenados; e o último quando o arco $\widehat{AP}$ não tem a extremidade P no 1º quadrante.

Quando estudamos a razão tangente na circunferência trigonométrica, mostramos cada um deles. Por isso, faremos agora apenas o primeiro caso.



Os triângulos OSP e OBQ são semelhantes:

$$\frac{OS}{OB} = \frac{SP}{BQ}$$

$$\frac{\sin \alpha}{1} = \frac{\cos \alpha}{\cotg \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \cotg \alpha = 1 \cdot \cos \alpha$$

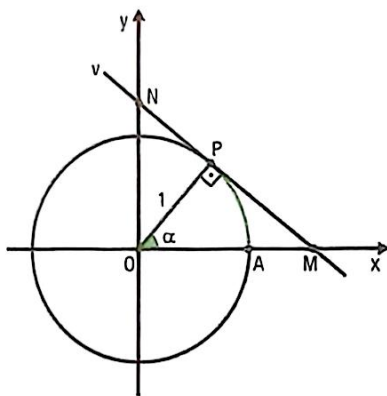
$$\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Observações

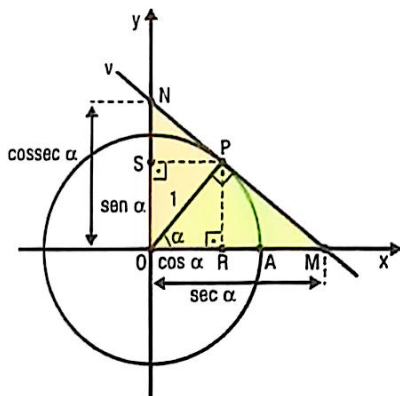
- A relação $\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ só faz sentido quando $\sin \alpha \neq 0$.
- Quando $\sin \alpha \neq 0$ e $\cos \alpha \neq 0$, a cotangente de α é o inverso da tangente de α , ou seja, $\cotg \alpha = \frac{1}{\tg \alpha}$.
Portanto, os sinais da cotangente são os mesmos da tangente.

Secante e cossecante

Considere agora uma reta v tangente à circunferência trigonométrica no ponto P .



Dado um arco $\widehat{AP}$, de medida α , considere os pontos M e N , interseções da reta v e dos eixos coordenados. A abscissa do ponto M corresponde à secante de α ; a ordenada do ponto N , à cossecante de α . Assim, as coordenadas de M são $(\sec \alpha, 0)$ e as coordenadas de N são $(0, \operatorname{cosec} \alpha)$. Veja, como podemos obter duas importantes relações. Mais uma vez nos restringiremos ao 1º quadrante. Entretanto, é possível mostrar a validade dessas relações nos outros quadrantes.



Na figura, observe inicialmente os triângulos OPM e ORP . Eles são semelhantes.

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OM}{OP}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sec \alpha}{1} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Da mesma forma, os triângulos OPN e OSP são semelhantes.

$$\frac{OP}{OS} = \frac{ON}{OP}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1} \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

- Desse modo, fica evidente que a secante de α é o inverso do cosseno de α e a cossecante de α é o inverso do seno de α . Assim,

a) qual é a condição para que a secante de um arco exista?

b) qual é a condição para que a cossecante de um arco exista?

c) quais são os sinais da secante e da cossecante?

Observações

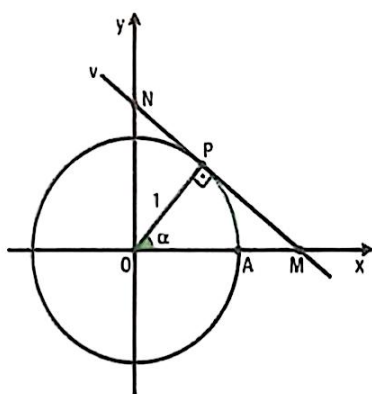
* A relação $\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ só faz sentido quando $\sin \alpha \neq 0$.

* Quando $\sin \alpha \neq 0$ e $\cos \alpha \neq 0$, a cotangente de α é o inverso da tangente de α , ou seja, $\cotg \alpha = \frac{1}{\tg \alpha}$.

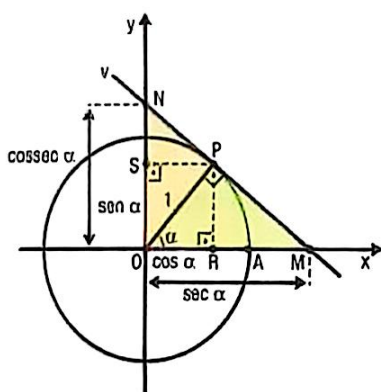
Portanto, os sinais da cotangente são os mesmos da tangente.

Secante e cossecante

Considere agora uma reta v tangente à circunferência trigonométrica no ponto P .



Dado um arco $\widehat{AP}$, de medida α , considere os pontos M e N , intersecções da reta v e dos eixos coordenados. A abscissa do ponto M corresponde à secante de α ; a ordenada do ponto N , à cossecante de α . Assim, as coordenadas de M são $(\sec \alpha, 0)$ e as coordenadas de N são $(0, \csc \alpha)$. Veja como podemos obter duas importantes relações. Mais uma vez nos restringiremos ao 1º quadrante. Entretanto, é possível mostrar a validade dessas relações nos outros quadrantes.



Na figura, observe inicialmente os triângulos OPM e ORP . Eles são semelhantes.

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OM}{OP}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sec \alpha}{1} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Da mesma forma, os triângulos OPN e OSP são semelhantes.

$$\frac{OP}{OS} = \frac{ON}{OP}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\csc \alpha}{1} \Rightarrow \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

- Desse modo, fica evidente que a secante de α é o inverso do cosseno de α e a cossecante de α é o inverso do seno de α . Assim,

a) qual é a condição para que a secante de um arco exista?

b) qual é a condição para que a cossecante de um arco exista?

c) quais são os sinais da secante e da cossecante?

Função cotangente

A função trigonométrica **cotangente** associa a cada número real $x \neq k \cdot \pi$ a cotangente do arco de medida x radianos.

$$f: \mathbb{R} - \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cotg x$$

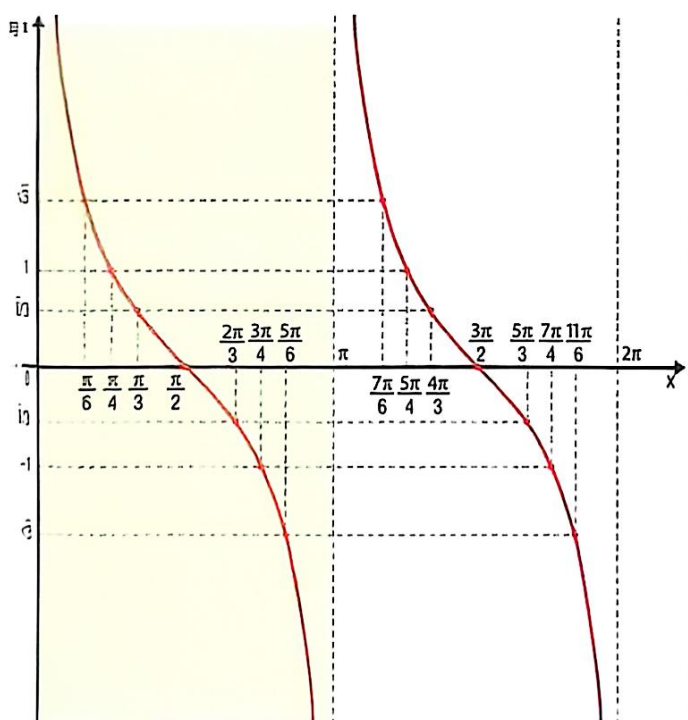
O domínio da função é restrito aos números reais para os quais $\sin x \neq 0$, pois $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Vamos construir o gráfico da função cotangente. Na tabela, alguns valores de y foram aproximados.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \cotg x$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$
$y = \cotg x$	$\nexists$	1,73	1	0,58	0	-0,58	-1	-1,73	$\nexists$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cotg x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$
$y = \cotg x$	1,73	1	0,58	0	-0,58	-1	-1,73	$\nexists$

Para indicar no gráfico que a cotangente não existe para $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$, traçamos retas verticais passando por esses valores.



- Como ocorre com outras funções que já estudamos, aqui também podemos atribuir a x valores menores que 0 ou maiores que 2π .

a) Qual é o período da função cotangente?

b) Qual é o conjunto-imagem?

c) A função cotangente é par ou ímpar?

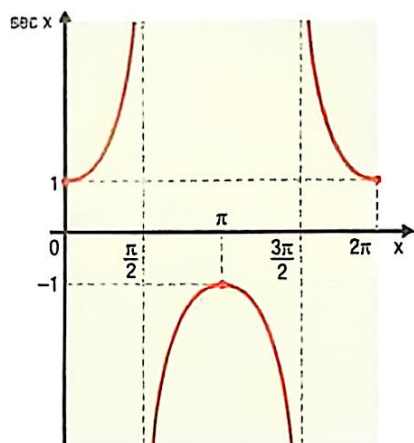
Função secante

A função trigonométrica **secante** associa a cada número real $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ a secante do arco de medida x radianos

função $\rightarrow f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sec x$

O domínio da função é restrito aos números reais para os quais $\cos x \neq 0$, pois $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

Veja como é o gráfico da função secante no intervalo $[0, 2\pi]$.



a) Qual é o período da função secante?

b) Qual é o conjunto-imagem?

c) A função secante é par. Justifique essa afirmação.

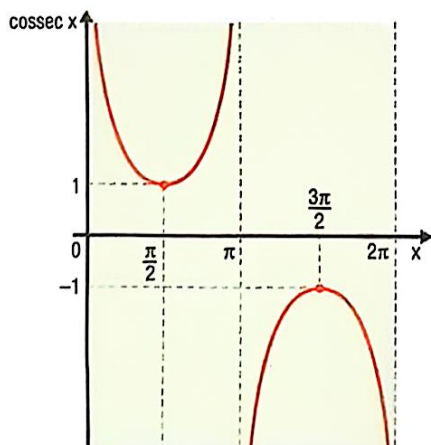
Função cossecante

A função trigonométrica **cossecante** associa a cada número real $x \neq k \cdot \pi$ a cossecante do arco de medida x radianos.

$$f: \mathbb{R} - \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{cosec} x$$

O domínio da função é restrito aos números reais para os quais $\sin x \neq 0$, pois $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Veja como é o gráfico da função cossecante no intervalo $[0, 2\pi]$.



a) Qual é o período da função cossecante?

b) Qual é o conjunto-imagem?

c) Justifique a afirmação de que a função cossecante é ímpar.



Atividades

1. Assinale V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas.

- a) () A cotangente de um arco com extremidade no 2º quadrante é negativa.
- b) () A secante de um arco com extremidade no 3º quadrante é negativa.
- c) () A cossecante de um arco com extremidade no 4º quadrante é negativa.
- d) () Se x pertence ao 3º quadrante, então $\sec x \cdot \operatorname{cosec} x$ é um número positivo.
- e) () Se $x = \frac{3\pi}{4}$, então $\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2}$.

2. Calcule o valor da expressão

$$\cot^2 30^\circ + \sec 60^\circ - \operatorname{cosec} 90^\circ.$$

a) $y = \operatorname{tg} 2x$

b) $y = 5 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = 2 + \operatorname{tg} 3x$

d) $y = -1 + 4 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

3. Com relação à função tangente $y = \operatorname{tg} x$, você já sabe que o período é π e o domínio é dado pelos valores de

x tais que $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, em que k é um número inteiro.

Para uma função do tipo $y = a + b \cdot \operatorname{tg}(cx + d)$, o período é igual a $p = \frac{\pi}{|c|}$. Determine o domínio e calcule

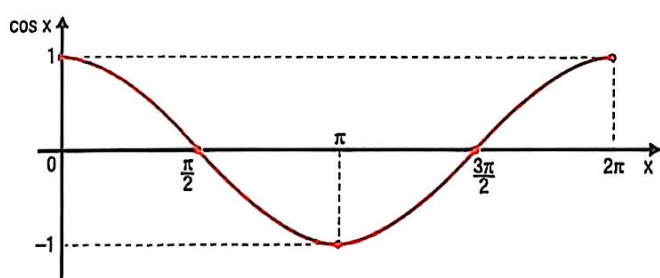
o período de cada uma das funções a seguir.

4. Determine o conjunto-imagem de cada função.

a) $y = 3 \cdot \sec x$

b) $y = 3 + \operatorname{cosec} x$

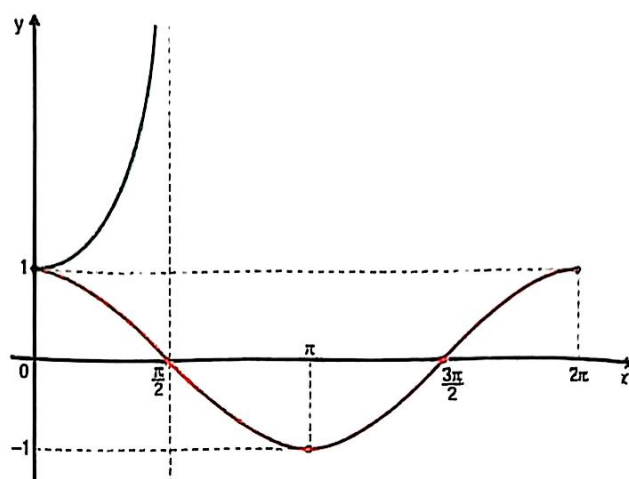
5. Os gráficos das funções secante, cossecante e cotangente podem ser esboçados com base nos gráficos das funções cosseno, seno e tangente, respectivamente. Veja, como exemplo, o esboço do gráfico de $y = \sec x$ a partir do gráfico de $y = \cos x$. Basta considerar o intervalo $[0, 2\pi]$, pois o gráfico é obtido repetindo esse trecho.



Como $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, temos:

$$\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

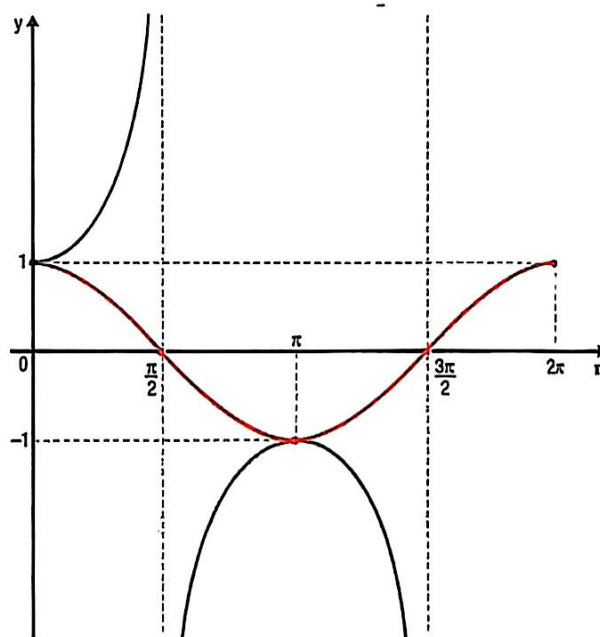
Para valores de x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, à medida que x aumenta e se aproxima de $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ diminui e se aproxima de zero. Com isso, $\sec x$ aumenta indefinidamente. Para $x = \frac{\pi}{2}$, o cosseno é nulo e a secante não existe.



Para facilitar a análise da função para valores de x entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, vamos repartir esse intervalo em dois e iniciar por $x = \pi$, verificando primeiro o que ocorre entre π e $\frac{\pi}{2}$ e, em seguida, o que ocorre entre π e $\frac{3\pi}{2}$.

$$\sec \pi = \frac{1}{\cos \pi} = \frac{1}{-1} = -1$$

Para valores de x menores que π , à medida que x diminui e se aproxima de $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ aumenta e se aproxima de 0. Com isso, $\sec x$ diminui indefinidamente, pois, nesse intervalo, $\cos x$ é negativo. O mesmo acontece para valores de x maiores que π , à medida que x aumenta e se aproxima de $\frac{3\pi}{2}$.

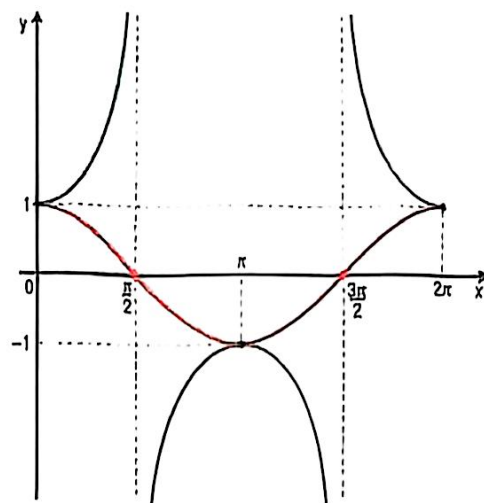


Para $x = \frac{3\pi}{2}$, o cosseno é nulo e a secante não existe.

- Resta analisar o que acontece para valores de x entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π .

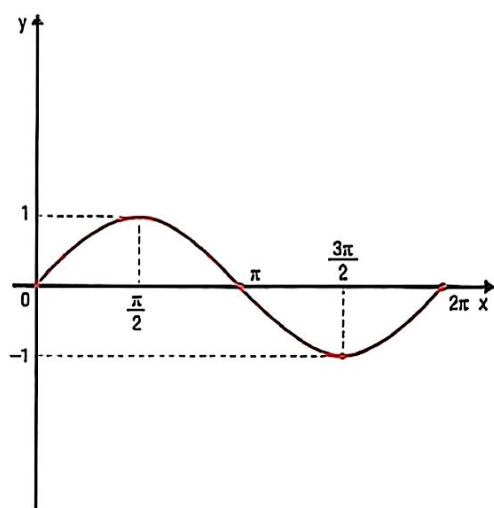
$$\sec 2\pi = \frac{1}{\cos 2\pi} = \frac{1}{1} = 1$$

Para valores de x menores que 2π , à medida que x se aproxima de $\frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ diminui e se aproxima de 0. Com isso, $\sec x$ aumenta indefinidamente.

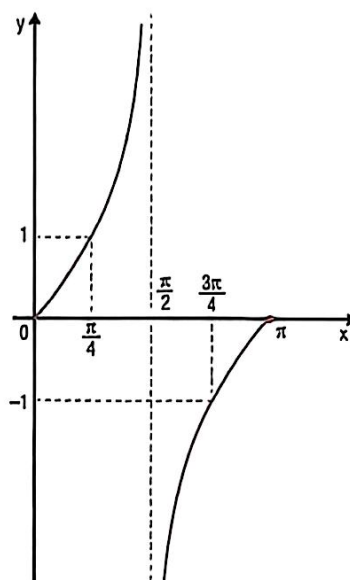


- Agora, faça um esboço dos gráficos das funções cossecante e cotangente.

Funções seno e cossecante



Funções tangente e cotangente



Relações trigonométricas

Até agora, você já estudou as seguintes relações trigonométricas:

1) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, para todo α .

2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, para $\cos \alpha \neq 0$.

3) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, para $\sin \alpha \neq 0$.

4) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, para $\cos \alpha \neq 0$.

5) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, para $\sin \alpha \neq 0$.

Por meio da primeira, podemos obter outras duas.

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ \text{Dividindo por } \sin^2 \alpha: \\ \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ \cotg^2 \alpha + 1 &= \operatorname{cosec}^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ \text{Dividindo por } \cos^2 \alpha: \\ \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \tg^2 \alpha &= \sec^2 \alpha\end{aligned}$$

Assim:

$$6) \sec^2 \alpha = 1 + \tg^2 \alpha, \text{ para } \cos \alpha \neq 0.$$

$$7) \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cotg^2 \alpha, \text{ para } \sin \alpha \neq 0.$$

Acompanhe dois exemplos em que essas relações são utilizadas.

1. Simplifique a expressão $\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{1 + \cotg x}$.

Solução

Inicialmente, escrevemos $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ e $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{1 + \cotg x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

Em seguida, desenvolvemos a expressão resultante, que envolve apenas $\sin x$ e $\cos x$.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} &= \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x \cdot \sin x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x \cdot \sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \\ &= \frac{\cancel{\sin x + \cos x}}{\cos x \cdot \cancel{\sin x}} \cdot \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x + \cos x}} = \frac{1}{\cos x} = \sec x\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{1 + \cotg x} = \sec x$.

A igualdade anterior é verdadeira quando cada uma das razões trigonométricas envolvidas existe. Assim, devemos ter $\sin x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

2. Quais são os valores de x na equação $x^2 - 2x \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0$?

Solução

Usamos a fórmula resolvente de uma equação do 2º grau.

$$x^2 - 2x \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2 \operatorname{tg} \alpha) \pm \sqrt{(-2 \operatorname{tg} \alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{4 \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)}}{2}$$

Como $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, temos:

$$x = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{4 \cdot \sec^2 \alpha}}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \pm 2 \sec \alpha}{2} = \operatorname{tg} \alpha \pm \sec \alpha$$

Portanto, $x = \operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha$ ou $x = \operatorname{tg} \alpha - \sec \alpha$.

As raízes da equação só fazem sentido quando $\cos \alpha \neq 0$. Outra observação é que rigorosamente o resultado de $\sqrt{4 \cdot \sec^2 \alpha}$ é $2 \cdot |\sec \alpha|$, pois a secante de α pode ser negativa. Porém, como na fórmula resolvente consideramos os dois sinais para o resultado da raiz quadrada, é desnecessário escrever o módulo.



Atividades

1. Sendo $\cos x = \frac{5}{13}$ e x um arco do 4º quadrante, calcule as outras cinco razões trigonométricas.



2. Prove que a igualdade

$$\frac{(\sec x + \operatorname{tg} x) \cdot (\sec x - \operatorname{tg} x)}{1 - \cos^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x \text{ é verdadeira}$$

para todos os valores de x tais que $\sin x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

3. Um arco $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ é tal que $\sec \alpha = -\sqrt{10}$.



a) Qual é o valor de $\cos \alpha$?

b) Calcule o valor de $\operatorname{tg} \alpha$.

c) Calcule o valor de $\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \cotg^2 \alpha} - 1$.

4. Calcule m para que se tenha simultaneamente $\cotg \alpha = m$ e $\operatorname{cosec} \alpha = 2m + 1$.

5. Uma igualdade que é verdadeira para todos os possíveis valores que as variáveis envolvidas podem assumir é denominada identidade.

Observe que a igualdade $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \sec \alpha$ é uma identidade, pois, para todos os valores de α tais que $\sin \alpha \neq 0$ e $\cos \alpha \neq 0$, a igualdade é verdadeira. Veja como podemos provar essa identidade.

1º membro: $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$

Simplificando, temos:

$$\underbrace{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}}_{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}} \cdot \underbrace{\operatorname{cosec} \alpha}_{\frac{1}{\sin \alpha}} = \frac{\cancel{\sin \alpha}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

Note que, nesse caso, simplificamos o 1º membro e obtivemos o 2º. Em algumas situações, é conveniente fazer o contrário. É possível também desenvolver simultaneamente os dois membros até obter uma igualdade sabidamente verdadeira.

Com base nisso, prove as seguintes identidades:

a) $\frac{\operatorname{tg} x + \cotg x}{\sec x} = \operatorname{cosec} x$

b) $\sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$

c) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2 \cos^2 x - 1$

d) $\frac{\cotg^2 x}{1 - \cotg^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$

6. (FGV – SP) Sabendo que x pertence ao segundo quadrante e que $\cos x = -0,80$, pode-se afirmar que

- a) $\operatorname{cosec} x = -1,666\dots$ d) $\cotg x = 0,75$
b) $\operatorname{tg} x = -0,75$ e) $\sin x = -0,6$
c) $\sec x = -1,20$

7. (UEPB) Dado $\sin x = 0,6$, onde x é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, o valor de $\cotg x \cdot \operatorname{cosec} x$ é igual a:

- a) 1 b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{20}{9}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{10}{9}$

8. (UFAM) Quando simplificamos a expressão $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x}$, vamos obter:

- a) $2 \sec x$ c) $2 \sec^2 x$ e) $\cos x$
b) $2 \operatorname{cosec} x$ d) $2 \cos x$

9. (UNIFOR – CE) Para todo $\theta \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, a expressão

$$\frac{\operatorname{cosec} \theta + \cos \theta}{\sec \theta + \sin \theta}$$

- a) $\cotg \theta$ c) $\operatorname{tg} \theta$ e) $\sec \theta - \operatorname{tg} \theta$
b) $-\cotg \theta$ d) $-\operatorname{tg} \theta$

10. Qual é o determinante da matriz a seguir?



$$A = \begin{bmatrix} \sin^2 x & 1 & 1 \\ \cos^2 x & \operatorname{tg}^2 x & \cotg^2 x \\ 1 & \sec^2 x & \operatorname{cosec}^2 x \end{bmatrix}$$

Dica: Você pode usar a Regra de Sarrus, mas será um pouco trabalhoso. É mais simples utilizar propriedades dos determinantes para obter o resultado.



Organize as ideias



Nesta unidade, você estudou as funções trigonométricas tangente, cotangente, secante e cossecante. Relacione as duas colunas, identificando as expressões que são equivalentes.

(1) $\cos^2 x$

(2) $\operatorname{tg} x$

(3) $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$

(4) $1 + \operatorname{tg}^2 x$

(5) $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

(6) $\sec x$

(7) $\operatorname{cossec}^2 x$

(8) $1 - \cos^2 x$

() $\operatorname{cossec} x$

() $\operatorname{cotg} x$

() $1 - \operatorname{sen}^2 x$

() $\sec^2 x$

() $\operatorname{sen}^2 x$

() $1 + \operatorname{cotg}^2 x$

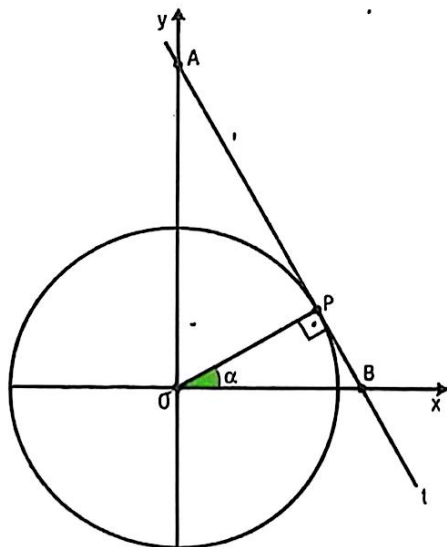
() $\frac{1}{\cos x}$

() $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$



Hora de estudo

1. Na figura, t é uma reta tangente à circunferência trigonométrica no ponto P . Os pontos A e B são as intersecções de t com os eixos coordenados. O ângulo α é agudo.



a) Mostre que a medida do segmento AB pode ser escrita como $\sec \alpha \cdot \operatorname{cossec} \alpha$.

b) Mostre que $PB = \operatorname{tg} \alpha$.

c) Mostre que $PA = \operatorname{cotg} \alpha$.

d) Com base nos resultados anteriores, escreva uma igualdade envolvendo $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$, $\sec \alpha$ e $\operatorname{cossec} \alpha$.

e) Calcule o perímetro e a área do triângulo AOB quando $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2. (UEPB) Sendo $A = \frac{\operatorname{cossec} 2460^\circ \cdot \sec 1110^\circ}{\operatorname{cotg} 2205^\circ}$, então o valor de A é igual a:

a) $\frac{4}{3}$

b) $-\frac{8}{3}$

c) $-\frac{1}{3}$

d) $\frac{8}{3}$

e) $-\frac{4}{3}$

3. Considere a seguinte expressão:

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \sec^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 x}$$

Satisfeitas as condições de existência, qual é o valor da expressão?

4. (FURG – RS) Para que a equação na variável x

$$\operatorname{tg}(x) = 10 - m^2$$

tenha soluções no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, a condição sobre

o valor real m é

a) $m = \sqrt{10}$.

b) $-3 \leq m \leq 3$.

c) $m < -3$.

d) $m > 3$.

e) nenhuma resposta está correta.

5. (UFSC) Sabendo que $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{4}$ e x é do primeiro

quadrante, então o valor da expressão

$9 \cdot (\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x)$ é:

6. (FGV – SP) Se $\cos x + \sec(-x) = t$, então, $\cos^2 x + \sec^2 x$ é igual a:

a) 1

d) $t^2 - 2$

b) $t^2 + 2$

e) $t^2 + 1$

c) t^2

7. (FGV – SP) Sabendo que o valor da secante de x é

dado por $\sec x = \frac{5}{4}$, em que x pertence ao intervalo

$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, podemos afirmar que os valores de $\cos x$,

$\sin x$ e $\operatorname{tg} x$ são respectivamente:

a) $\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}$ e $\frac{-3}{4}$

d) $\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}$ e $\frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$

e) $\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}$ e $\frac{3}{4}$

c) $\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}$ e $\frac{-4}{3}$

8. (UFAM) Associe as expressões equivalentes das duas colunas e assinale a alternativa correspondente à associação correta:

(A) $\frac{1}{\cos^2 x}$

(1) $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$

(B) $\sec x$

(2) $\operatorname{tg}^2 x + 1$

(C) $\sec^2 x - 1$

(3) 1

(D) $\operatorname{cosec}^2 x - \cotg^2 x$

(4) $\operatorname{tg}^2 x$

a) A2, B1, C3, D4

b) A3, B1, C4, D2

c) A2, B3, C4, D1

d) A2, B1, C4, D3

e) A2, B4, C1, D3

9. (UEPG – PR) Se $A = \sec \theta + \operatorname{tg} \theta$ e $B = \sec \theta - \operatorname{tg} \theta$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, assinale o que for correto.

(01) Se $\theta = \frac{\pi}{3}$ então $B > 0$.

(02) $A \cdot B = 1$

(04) $\frac{A}{B} = \sec^2 \theta + \operatorname{tg}^2 \theta$

(08) $A + B = \frac{2}{\sin \theta}$

(16) Se $\theta = \frac{\pi}{6}$ então $B < 0$.

10. (UFC – CE) Considere a igualdade

$\operatorname{tg} x = \cotg x + \frac{P \cdot (2 - \sec^2 x)}{2 \operatorname{tg} x}$. Assinale a opção que

apresenta o valor de P , para o qual a igualdade acima

seja válida para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, k inteiro.

a) 2.

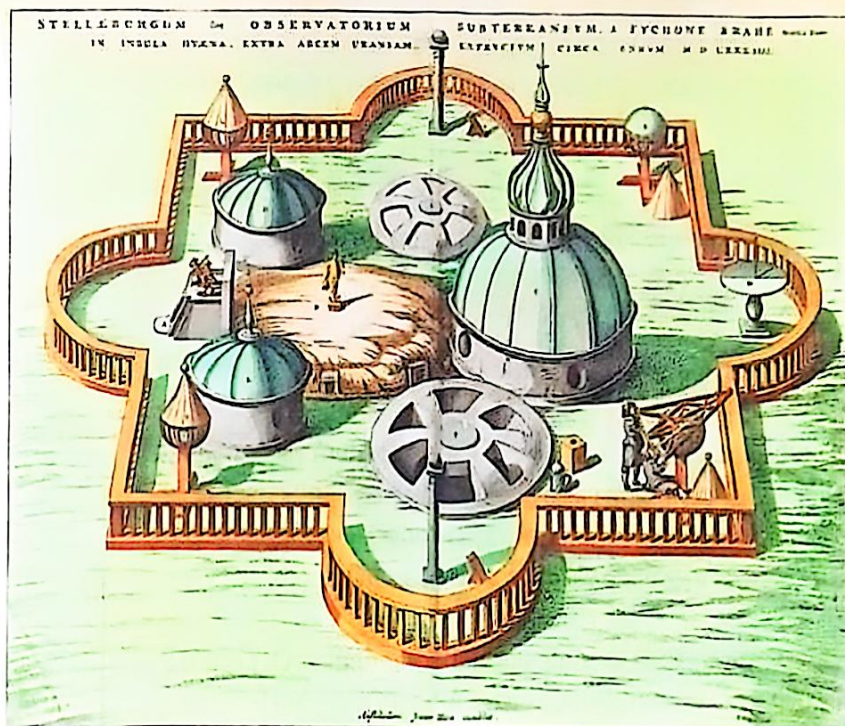
d) -1.

b) 1.

e) -2.

c) 0.

Transformações e equações trigonométricas



Latinstock/Album Art



Ponto de partida

Antes da descoberta dos logaritmos, era utilizado um procedimento para multiplicar dois números positivos a e b que se baseava na identidade abaixo.

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

Nela, o produto dos números $\cos x$ e $\cos y$ é substituído pela metade da soma de dois outros, $\cos(x+y)$ e $\cos(x-y)$. Esse procedimento era bastante utilizado em importantes observatórios astronômicos, como o de Tycho Brahe (1546-1601), na Dinamarca, que aparece na imagem acima.

1. Você sabe o que se faz em um observatório astronômico?
2. Qual é a vantagem do procedimento de cálculo citado?

Com o estudo desta unidade, você deverá ser capaz de compreender as relações que envolvem operações entre arcos. Igualmente, é esperado que utilize esse conhecimento como ferramenta no desenvolvimento de novas relações e na resolução de equações trigonométricas.

Seno, cosseno e tangente da adição e da subtração de arcos

Vamos começar analisando as seguintes igualdades:

- $3 \cdot (x - 5) = 3x - 15$, para todo número real x .
- $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, quaisquer que sejam os números positivos a e b .
- $\log(a+b) = \log a + \log b$, quaisquer que sejam os números positivos a e b .
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, quaisquer que sejam as matrizes A e B , quadradas e de mesma ordem.

Enquanto a primeira e a última são verdadeiras, as outras duas são falsas. Mesmo que existam casos particulares que tornem verdadeira uma igualdade, ela só se caracteriza como uma propriedade quando for verdadeira para todos os possíveis casos.

Observe agora outra igualdade:

$$\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$$

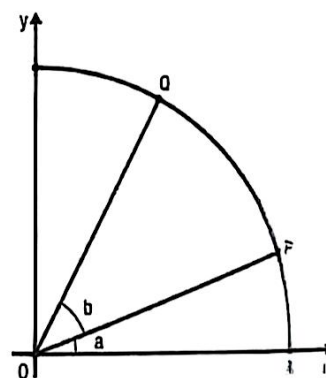
Verificamos facilmente que ela é falsa:

$$\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1 \text{ e } \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

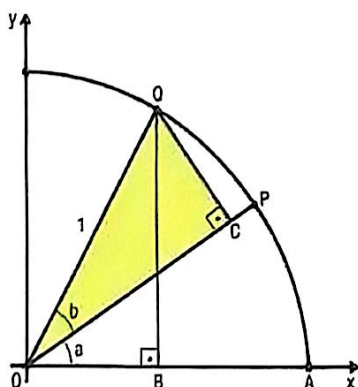
Desse modo, não é verdade que $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$. Existem várias maneiras de obtermos as fórmulas que permitem calcular o seno ou o cosseno da soma ou da diferença de dois arcos. Aqui, faremos a demonstração considerando apenas o 1º quadrante. Entretanto, é possível mostrar a validade para quaisquer arcos.

Observe, na figura, o 1º quadrante da circunferência trigonométrica. Os pontos P e Q pertencem à circunferência. As medidas dos arcos $\widehat{AP}$ e $\widehat{PQ}$ são a e b , respectivamente.

Qual é a medida do arco $\widehat{AQ}$? _____



Considere agora os pontos B e C , que são as respectivas projeções ortogonais de Q sobre o eixo das abscissas e sobre o segmento OP .



No triângulo retângulo OQ , temos:

$$\sin b = \frac{CQ}{OQ} = \frac{CQ}{1} = CQ$$

$$CQ = \sin b$$

$$\cos b = \frac{OC}{OQ} = \frac{OC}{1} = OC$$

$$OC = \cos b$$

Note que $OB = \cos(a+b)$

$$\cos a = \frac{OE}{OC}$$

$$\cos a = \frac{OE}{\cos b}$$

$$\text{sen } a = \frac{DC}{OC}$$

$$\text{sen } a = \frac{DC}{\text{sen } b}$$

Podemos escrever 75° como $45^\circ + 30^\circ$. Assim:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos (90^{\circ}-x)=OO'=OO''=PP'=\operatorname{sen} x$$

Podemos mostrar que essas relações são válidas em qualquer quadrante.

Portanto, temos:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ - x) = \operatorname{sen} x$$

Escrevendo as medidas dos arcos em radianos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

O seno da soma dos arcos de medidas a e b pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos[90^\circ - (a+b)]$$

Para nosso objetivo, interessa reescrever o segundo membro organizado de outro modo.

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos[(90^\circ - a) - b]$$

Agora, podemos usar a fórmula do cosseno da diferença dos arcos de medidas $90^\circ - a$ e b para obter $\operatorname{sen}(a+b)$.

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos(90^\circ - a) \cdot \cos b + \operatorname{sen}(90^\circ - a) \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

Então:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Para obtermos uma fórmula para o seno da diferença dos arcos de medidas a e b , procedemos de modo análogo ao utilizado para o cosseno da diferença.

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b))$$

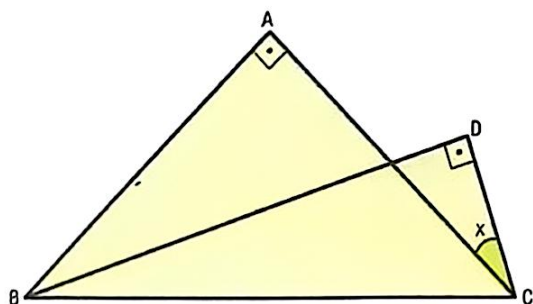
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b) \cdot \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + (-\operatorname{sen} b \cdot \cos a)$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Observe, na figura, o triângulo ABC , retângulo e isósceles, e o triângulo retângulo BCD , em que $BD = 6$ e $CD = 2$.

Quais são os valores de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$?



Agora, vamos obter as fórmulas da tangente da soma e da tangente da diferença de dois arcos. Como a tangente de um arco é a razão entre o seno e o cosseno desse arco, temos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$$

Vamos usar um artifício: dividir o numerador e o denominador da fração do segundo membro da igualdade anterior por $\cos a \cdot \cos b$.

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \cancel{\cos b} + \operatorname{sen} b \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}}}{\frac{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b} - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}}} \Rightarrow \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Como fizemos anteriormente, escrevendo $a - b$ como $a + (-b)$, temos:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}(a+(-b)) \Rightarrow \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg}(-b)}$$

Lembre-se de que $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b$, pois $\operatorname{tg}(-b) = \frac{\operatorname{sen}(-b)}{\cos(-b)} = \frac{-\operatorname{sen} b}{\cos b} = -\operatorname{tg} b$. Assim:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a + (-\operatorname{tg} b)}{1 - \operatorname{tg} a \cdot (-\operatorname{tg} b)} \Rightarrow \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

As fórmulas da tangente da soma e da tangente da diferença de dois arcos só são válidas quando as tangentes de todos os arcos envolvidos existirem.

Veja, por exemplo, como calcular o valor de $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Podemos escrever 15° como $60^\circ - 45^\circ$. Poderia ser $45^\circ - 30^\circ$, mas a primeira possibilidade requer cálculos um pouco mais simples.

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ)$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

Usando 1,73 como aproximação para $\sqrt{3}$, o valor de $\operatorname{tg} 15^\circ$ é 0,27.

Reunindo as relações obtidas, temos:

Sen	Cosseno	Tangente
$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$	$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$	$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$
$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$	$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$	$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Note que as fórmulas do seno diferem entre si apenas pelo sinal. O mesmo acontece com as fórmulas do cosseno e da tangente.



Matemática em detalhes

Você já sabe dizer qual é o conjunto-imagem de uma função trigonométrica da forma $y = a + b \cdot \sin(cx + d)$ ou $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$. Basta usar o fato de que o seno ou o cosseno são limitados e variam de -1 a 1 . No entanto, em algumas situações, a determinação do conjunto-imagem não é imediata. Acompanhe um exemplo.

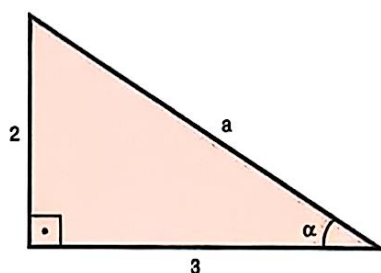
Qual é o valor máximo da função $y = 3 \sin x + 2 \cos x$?

Além desse valor, poderíamos também querer saber qual é o valor mínimo da função ou, de modo mais amplo, qual é seu conjunto-imagem.

Alguns poderiam pensar que o valor máximo ocorre quando $\sin x = 1$. Nesse caso, $\cos x = 0$ e $y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$.

Porém, isso não é verdade, pois, se $x = \frac{\pi}{4}$, temos que $y = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, e esse número é maior do que 3. Será que é possível obter um valor ainda maior do que esse?

Inicialmente, vamos desenhar um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 2. Esses são os coeficientes de $\sin x$ e $\cos x$.



Calculamos a medida da hipotenusa do triângulo retângulo e as razões seno e cosseno do ângulo agudo de medida α .

$$a^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 4 + 9 \Rightarrow a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Agora, vamos lançar mão de um artifício. Na função $y = 3 \sin x + 2 \cos x$, podemos dividir os dois membros por $\sqrt{13}$, para fazer aparecerem os valores de $\sin x$ e de $\cos x$ obtidos anteriormente.

$$\frac{y}{\sqrt{13}} = \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \sin x + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \cos x$$

Basta fazer algumas substituições e escrever o valor de y de um modo conveniente para nosso objetivo.

$$\frac{y}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \sin x + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \cos x$$

$$\frac{y}{\sqrt{13}} = \cos \alpha \cdot \sin x + \sin \alpha \cdot \cos x$$

$$y = \sqrt{13} \cdot (\sin x \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos x)$$

$$y = \sqrt{13} \cdot \sin(x + \alpha)$$

Pronto! Como $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$, o conjunto-imagem da função é o intervalo $[-\sqrt{13}, \sqrt{13}]$ e naturalmente $\sqrt{13}$ é o valor máximo de y .

Além dessa, existem outras maneiras de resolver esse problema. Deixamos mais dois problemas para você pensar e tentar resolver.

- Quais são os valores mínimo e máximo da função $y = \sin x + \cos x$?
- Qual é o valor de $y = \cos 75^\circ - \sqrt{3} \cdot \sin 75^\circ$?



Atividades

1. Calcule os valores de:

- a) $\sin 105^\circ$ b) $\cos 15^\circ$ c) $\tan 75^\circ$

2. Simplifique a seguinte expressão:

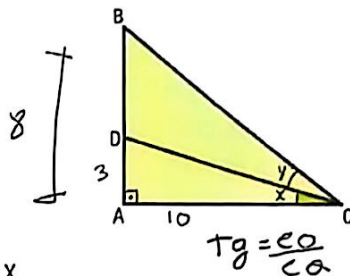
$$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$$

3. Calcule os valores de $\sin(x-y)$, $\cos(x+y)$ e $\tan(y-x)$,

dado que $\sin x = \frac{4}{5}$, $\cos y = \frac{5}{13}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

4. Calcule o valor de $\sec 285^\circ$.

5. No triângulo retângulo ABC da figura, D é um ponto do lado AB. Dado que $AB = 8$, $AD = 3$ e $AC = 10$, calcule:



a) $\tan x$

$$\tan x = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{10} = 0,3$$

b) $\tan y$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{AD}{AC}} = \frac{0,3 + \tan y}{1 - 0,3 \tan y}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{0,3 + \tan y}{1 - 0,3 \tan y}$$

$$8(1 - 0,3 \tan y) = 10(0,3 + \tan y)$$

$$8 - 2,4 \tan y = 3 + 10 \tan y$$

c) A seguir, estão apresentados alguns valores da tangente aproximados para seis casas decimais.

Ângulo	Tangente	Ângulo	Tangente
15°	0,267949	22°	0,404026
16°	0,286745	23°	0,424475
17°	0,305731	24°	0,445229
18°	0,324920	25°	0,466308
19°	0,344328	26°	0,487733
20°	0,363970	27°	0,509525
21°	0,383864	28°	0,531709

Quais são os valores aproximados de x e y ?

6. Responda a cada um dos itens a seguir.

- a) Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sin 65^\circ & \sin 155^\circ \\ \cos 115^\circ & \cos 25^\circ \end{bmatrix}.$$

- b) Calcule o valor de $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2$ quando $x - y = 60^\circ$.
- c) Quando $\sin x = 0,6$, $\sin y = 0,75$ e x e y pertencem ao primeiro quadrante, qual é o valor de $\sin(x - y) \cdot \cos y + \cos(x - y) \cdot \sin y$?

7. (UFPR) Considere $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tais que $\sin x = \frac{3}{5}$ e

$$\sin y = \frac{4}{5}.$$

- a) Calcule os valores de $\cos x$ e $\cos y$.
- b) Calcule os valores de $\sin(x + y)$ e $\cos(x - y)$.

8. (UFSC) Sejam a e b os ângulos centrais associados, respectivamente, aos arcos AN e AM na circunferência trigonométrica da figura 1 e considere x na figura 2, a seguir. Determine o valor de $y = 15x^4$, sabendo que

$$a + b = \frac{\pi}{2}.$$

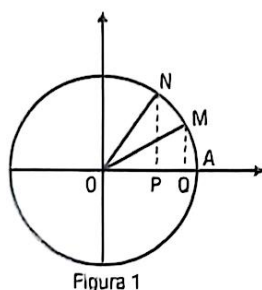


Figura 1

$$\overline{OA} = 1$$

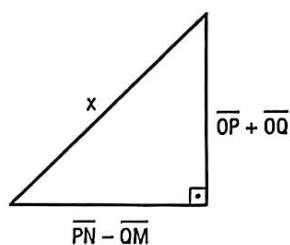


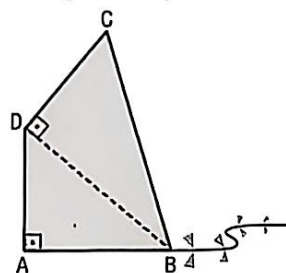
Figura 2

9. (FGV - SP) O valor de y no sistema de equações

$$\begin{cases} \sin 10^\circ x - \cos 10^\circ y = -\frac{1}{\sin 50^\circ} \\ \sin 50^\circ x + \cos 50^\circ y = \frac{1}{\sin 10^\circ} \end{cases} \text{ é}$$

- a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ c) $3\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- b) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. (UNIFACS - BA) Por falta de prática, um garoto confeccionou uma pipa na forma de um quadrilátero irregular, como representado na figura. Admitindo-se que $\hat{B}AD$ e $\hat{B}DC$, no quadrilátero ABCD, são ângulos retos e os lados AB, AD e DC medem, respectivamente, $\sqrt{5}$, 2 e 3 unidades de comprimento, pode-se afirmar que $\vartheta = \hat{A}BC$ é um ângulo tal que



- (01) $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ (04) $\operatorname{tg} \vartheta = 9 - 4\sqrt{5}$
- (02) $\cos \vartheta = \frac{2}{3}$ (05) $\operatorname{tg} \vartheta = 9 + 4\sqrt{5}$
- (03) $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{5} - 2}{3\sqrt{2}}$

Seno, cosseno e tangente de arcos duplos

Para obter relações que nos permitem calcular o seno, o cosseno e a tangente do dobro de um arco, basta utilizar as fórmulas que fornecem as razões trigonométricas da soma de dois arcos.

- $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

Substituindo b por a , temos:

$$\sin(a + a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a$$

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

Para o cosseno e para a tangente, procedemos de modo análogo.

- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$$\cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\bullet \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a+a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Reunindo todas as relações, temos:

$$\bullet \sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\bullet \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\bullet \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

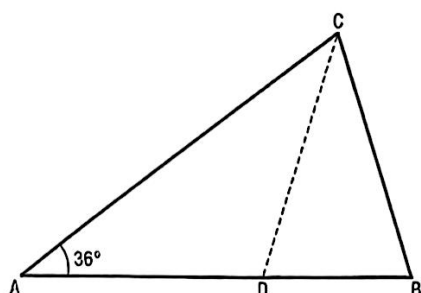


Atividades

1. Dado que $\sin x = \frac{3}{5}$ e que x pertence ao 2º quadrante, calcule $\sin 2x$, $\cos 2x$ e $\operatorname{tg} 2x$.

2. Dado que $\operatorname{tg} x = 3$, calcule $\operatorname{tg} 2x$ e $\operatorname{tg} 3x$.

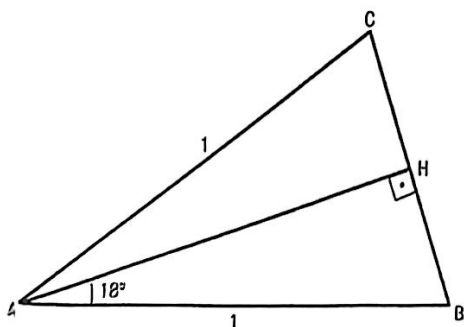
3. Na figura a seguir, o triângulo ABC é isósceles, com $AB = AC = 1$. O segmento CD é bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$. Sabe-se ainda que o ângulo $\widehat{BAC}$ mede 36° .



a) Os triângulos ABC e CBD são semelhantes. Justifique essa afirmação.

b) Sabendo que x é a medida do lado BC, use a semelhança dos triângulos e calcule o valor de x .

c) Observe agora o triângulo ABC e a altura AH, relativa ao lado BC. Qual é a medida do segmento BH?



d) Calcule $\sin 18^\circ$ e $\cos 18^\circ$.

e) Calcule $\cos 36^\circ$.

4. Responda a cada um dos itens a seguir.

a) Qual é o valor de $a = \sin(22,5^\circ) \cdot \cos(22,5^\circ)$?

b) Qual é o valor de $b = (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2$?

c) Dado que $\sin x - \cos x = \frac{3}{4}$, calcule o valor de $\sin 2x$.

5. A expressão $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$, quando $\sin x \neq 0$ e

$\cos x \neq 0$, é igual a:

a) $\sin 2x$

c) 2

e) 0

b) $\cos 2x$

d) -2

6. Qual é o período e o conjunto-imagem da função

$y = 10 \cdot \sin x - \cos x$?

7. (UECE) Se x é um ângulo tal que $\cos x = \frac{1}{4}$, então o



valor do determinante $\begin{vmatrix} \sin 2x & 2\cos^2 x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$ é

- a) 1. b) 0. c) $\frac{1}{2}$. d) $-\frac{1}{2}$.

codando

8. (UNIFESP) Se x é a medida de um arco do primeiro quadrante e se $\sin x = 3\cos x$, então $\sin(2x)$ é igual a



- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. b) $\frac{3}{5}$. c) $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$. d) $\frac{4}{5}$. e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

sen 2x = sen x cos x + cos x sen x
 $2 \cdot \cos^2 x + 2 \sin^2 x$

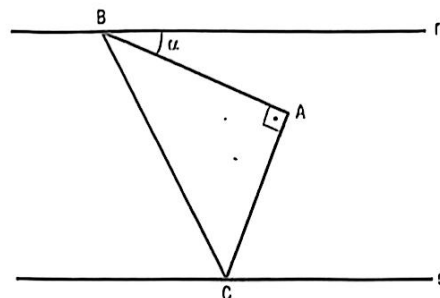
9. (PUCRS) A expressão



$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ é idêntica a

- a) $2 \cdot \cos 2\alpha$ d) $\sin 2\alpha$
 b) $2 \cdot \sin 2\alpha$ e) $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha$
 c) $\cos 2\alpha$

10. (FUVEST - SP) As retas r e s são paralelas e A é um ponto entre elas que dista 1 de r e 2 de s . Considere um ângulo reto, de vértice em A , cujos lados interceptam r e s nos pontos B e C , respectivamente. O ângulo agudo entre o segmento $\overline{AB}$ e a reta r mede α .



- a) Calcule a área do triângulo ABC em função do ângulo α .
 b) Para que valor de α a área do triângulo ABC é mínima?

Equações trigonométricas

Desde o Ensino Fundamental, você se depara com situações em que precisa resolver equações. Já aprendeu a resolver equações do 1º grau, do 2º grau, exponenciais, logarítmicas, modulares, entre outras. Veja alguns exemplos

- $3x + 6 = 0$ (equação do 1º grau);
- $x^2 - 7x + 12 = 0$ (equação do 2º grau);
- $\log_2(x-1) + \log_4(3x+1) = 4$ (equação logarítmica);
- $|2x - 3| = 11$ (equação modular).

Você ainda vai estudar equações algébricas de grau maior que 2, como $x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = 0$. Mas agora vamos falar de outras equações, as trigonométricas.

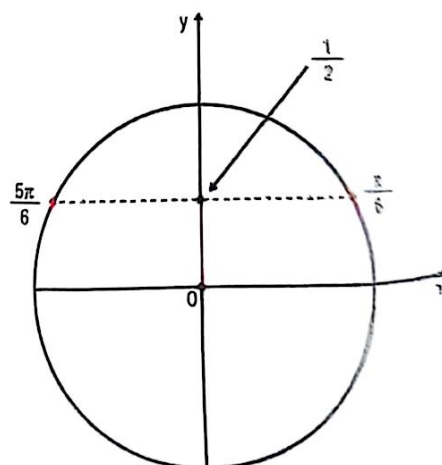
- $\sin x = \frac{1}{2}$

Inicialmente, indicamos na circunferência trigonométrica as extremidades dos arcos tais que o seno é igual a $\frac{1}{2}$. Na primeira volta

positiva, os valores de x tais que $\sin x = \frac{1}{2}$ são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$. O valor do

2º quadrante é obtido pela simetria em relação ao eixo y e calculado por

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$



Para escrever expressões que englobem as soluções das infinitas voltas, em qualquer um dos sentidos, podemos pensar da maneira descrita a seguir.

Por meio da solução da primeira volta positiva, $x = \frac{\pi}{6}$, teremos outras soluções sempre que percorrermos um número inteiro de voltas. Em outras palavras, "de 2π em 2π ", teremos uma nova solução. Portanto, sendo k um número inteiro, que indica o número de voltas percorridas a partir de $\frac{\pi}{6}$, temos:

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

O mesmo acontece para $x = \frac{5\pi}{6}$ e, nesse caso, a solução geral é dada por:

$$x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

Portanto, o conjunto-solução S da equação é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como o valor do cosseno é negativo, não existe solução no 1º quadrante. Nesse caso, podemos usar como auxílio o arco do 1º quadrante cujo cosseno é o oposto do cosseno dado. Assim, vamos representar

a extremidade dos arcos desse quadrante tais que o cosseno seja $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na primeira volta positiva, esse arco mede $\frac{\pi}{4}$ e sua extremidade está representada em verde.

Pela simetria em relação ao eixo y e em relação à origem, obtemos

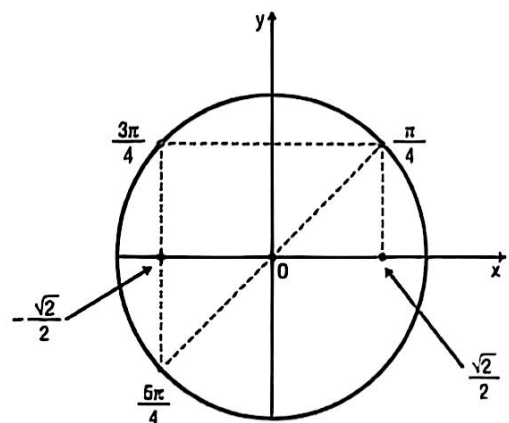
soluções no 2º e no 3º quadrante, nos quais o cosseno é negativo, ou seja, $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ e $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Assim, sendo k um número inteiro,

o arco $2x$ é dado por:

$$2x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

Usando as igualdades anteriores, obtemos $x = \frac{3\pi}{8} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{5\pi}{8} + k \cdot \pi$. Portanto:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$



$$\bullet \quad \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

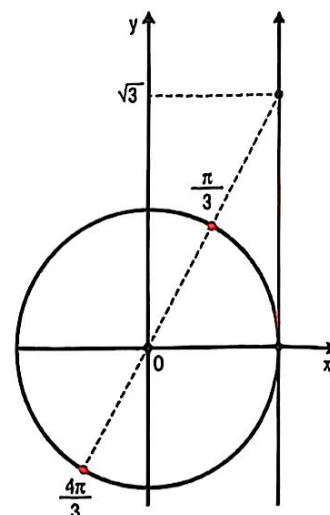
A tangente é positiva no 1º e no 3º quadrante. Mais uma vez, indicamos na circunferência trigonométrica as extremidades dos arcos tais que a tangente seja igual a $\sqrt{3}$. Na primeira volta positiva, esses valores são $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$. O valor do 3º quadrante é obtido pela simetria em relação à origem e calculado por $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Veremos agora que é possível englobar todas as soluções das infinitas voltas em uma única expressão. Por meio da solução da primeira volta positiva, $x = \frac{\pi}{3}$, teremos outras soluções sempre que percorrermos um múltiplo de π , ou seja, "de π em π ", teremos uma nova solução. Portanto, sendo k um número inteiro, o arco $x - \frac{\pi}{6}$ é dado por:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

Dessa igualdade, temos que $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. Portanto:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Atividades

1. Resolva as seguintes equações trigonométricas.



a) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\sin x = 1$

e) $\cos 4x = -1$

f) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

2. Existem situações em que precisamos determinar as soluções de uma equação trigonométrica apenas em certo intervalo, como na primeira volta positiva. Acompanhe os exemplos.



1) Resolva a equação $\operatorname{tg} 2x = 1$ no intervalo $[0, \pi]$.

Os arcos da primeira volta positiva tais que a tangente seja igual a 1 são $\frac{\pi}{4}$ e $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Portanto,

a solução é dada por:

$$2x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ em que } k \text{ é um número}$$

mero inteiro.

Agora, atribuímos valores a k para determinar as soluções no intervalo considerado.

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \in [0, \pi]$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{8} \in [0, \pi]$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{8} \notin [0, \pi]$$

O conjunto-solução é $S = \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \right\}$.

2) Qual é o conjunto-solução da equação

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \text{ no intervalo } [0, 2\pi]?$$

Observe que essa equação não é tão simples quanto as anteriores, pois temos uma equação do 2º grau em que a incógnita é $\sin x$.

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = -1$$

No intervalo $[0, 2\pi]$, as soluções de $\sin x = \frac{1}{2}$ são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, enquanto a única solução de $\sin x = -1$ é $\frac{3\pi}{2}$. Portanto:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Resolva as seguintes equações nos intervalos especificados:

a) $\sec x = \sqrt{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$

b) $\tan 4x = -1$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) $\sin 4x = 0$ no intervalo $]-\pi, \pi]$

d) $\sin 2x = \sqrt{3} \cdot \cos x$ no intervalo $]0, \pi[$

3. Qual é o número de soluções da equação

$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$ no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$?

Dica: Multiplique ambos os membros da equação por 2.

Organize as ideias

Nesta unidade, estudamos algumas transformações trigonométricas, além de alguns modelos de equações. Complete o quadro com as fórmulas correspondentes.

Senos da soma	
Senos da diferença	
Cossenos da soma	
Cossenos da diferença	
Tangentes da soma	
Tangentes da diferença	
Senos do dobro de um arco	
Cossenos do dobro de um arco	
Tangentes do dobro de um arco	

1. Em qualquer triângulo não retângulo, a soma das tangentes dos três ângulos internos é igual ao seu produto, ou seja:

$$\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C}$$

Prove que esse resultado é verdadeiro.

2. (UEG - GO) Considerando-se que $\sin(5^\circ) = \frac{2}{25}$, tem-se que $\cos(50^\circ)$ é

- a) $\frac{\sqrt{2}}{50}(\sqrt{621}+2)$ c) $\frac{\sqrt{2}}{50}(1-\sqrt{621})$
b) $\frac{\sqrt{2}}{50}(\sqrt{621}-2)$ d) $\frac{\sqrt{2}}{50}(\sqrt{621}-1)$

3. (UNIFOR - CE) Se $\tan(x-y) + 2x = 5 - 2y$ e $\tan(y-x) + y = 7 - x$, então o valor de $x + y$ é:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

4. (FGV - SP) Se $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{15}}{3}$ e $\cos x + \cos y = 1$, então, $\sec(x-y)$ é igual a

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) 3 e) 4

5. (UEPB) Sabendo que $\cotg x = \frac{1}{2}$, o valor da $\operatorname{tg} 2x$ é igual a:

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{4}{3}$ d) -1 e) $-\frac{4}{3}$

6. (UFTM - MG) Se $\sin x + \cos x = \frac{1}{n}$ e $\sin 2x = -\frac{24}{25}$, com $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ e $n > 0$, então n é igual a

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7. (FUVEST - SP) Um arco x está no terceiro quadrante do círculo trigonométrico e verifica a equação $5 \cos 2x + 3 \sin x = 4$. Determine os valores de $\sin x$ e $\cos x$.

8. (PUC-Rio - RJ) Quantas soluções a equação $\cos(2x - 1) = 0$ tem no intervalo $[0, 5]$? (Lembre que $\pi \approx 3,14$)

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

9. (UFAM) A solução da equação trigonométrica $2 \cos x - 5 \sec x = 9$ é igual a:

- a) $S = \left\{ x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}; k \text{ inteiro} \right\}$
b) $S = \left\{ x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}; k \text{ inteiro} \right\}$
c) $S = \left\{ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}; k \text{ inteiro} \right\}$
d) $S = \left\{ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}; k \text{ inteiro} \right\}$
e) $S = \left\{ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}; k \text{ inteiro} \right\}$

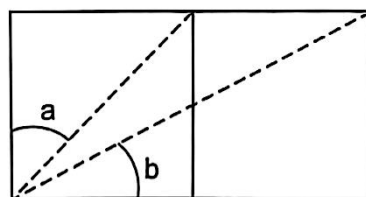
10. (UNESP - SP) Dada a equação $\cos 4x = -\frac{1}{2}$,

- a) verifique se o ângulo x pertencente ao 1º quadrante,

tal que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ satisfaz a equação acima;

- b) encontre as soluções da equação dada, em toda a reta.

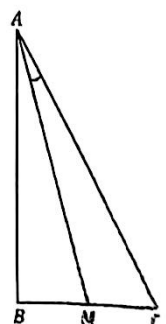
11. (UEFS - BA) Considerando-se a e b os ângulos indicados na figura, em que os dois quadrados são congruentes com um lado comum, pode-se afirmar que o valor do $\sin(a+b)$ é



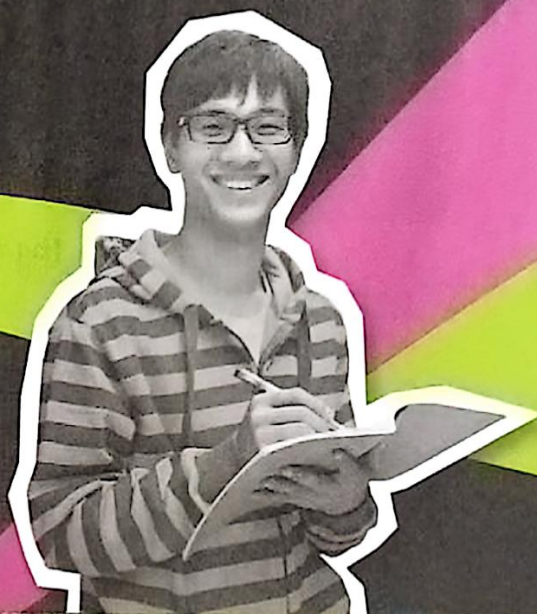
- a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

12. (FUVEST - SP) No triângulo retângulo ABC, ilustrado na figura, a hipotenusa AC mede 12 cm e o cateto BC mede 6 cm. Se M é o ponto médio de BC, então a tangente do ângulo MAC é igual a

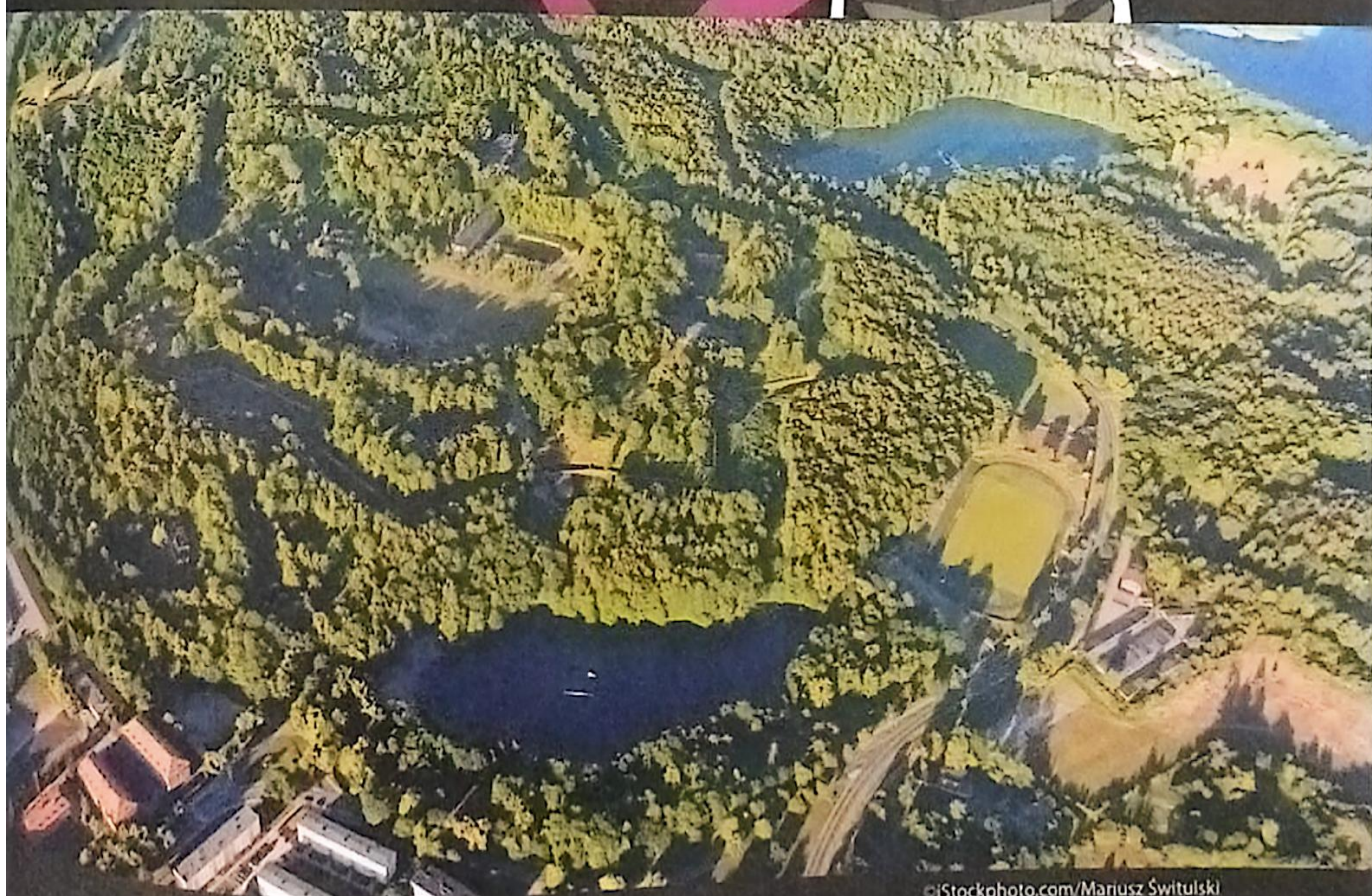
- a) $\frac{\sqrt{2}}{7}$ c) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ d) $\frac{2\sqrt{2}}{7}$



23



Geometria analítica I



©iStockphoto.com/Mariusz Switulski



Ponto de partida

Os satélites vasculham toda a superfície da Terra e o fundo dos oceanos. Podem ser programados para localizar pontos quaisquer e enviar imagens ou informações sobre deslocamentos e trajetórias. A localização de um navio, por exemplo, é feita por meio de algumas informações. Explique quais informações são necessárias para a localização de um ponto qualquer na superfície do nosso planeta.

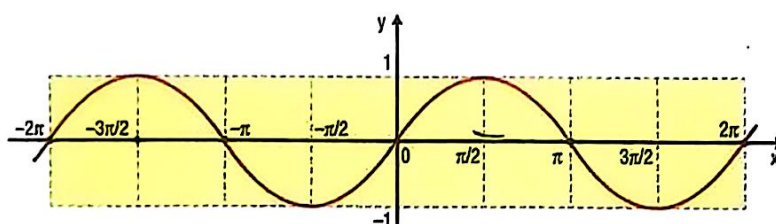
Entre outros objetivos, ao concluir o estudo desta unidade, você deverá ser capaz de representar corretamente pontos e retas no plano cartesiano, calcular distância entre pontos e de ponto a reta, reconhecer e escrever a equação de uma reta em suas diversas formas e discutir a posição relativa entre duas retas.

Página importante: 37, 38, 40, (43, 44), (45) 46
topo

Plano cartesiano

Ao estudar funções, você elaborou alguns esboços de gráficos atribuindo valores para a variável independente x e obtendo os correspondentes valores para a variável dependente y . A cada par ordenado (x, y) , você associou um ponto no plano e ligou esses pontos convenientemente, obtendo o gráfico da função.

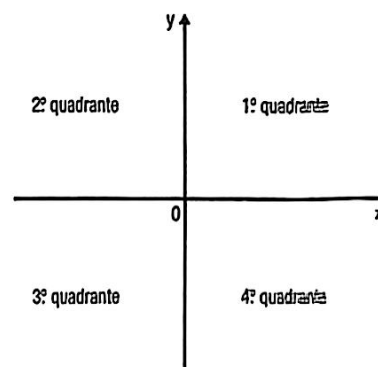
Como exemplo, observe a seguir o gráfico da função real f definida por $y = f(x) = \sin(x)$.



O estudo da geometria analítica ocorre no plano cartesiano e, além de gráficos de funções reais, considera gráficos construídos por equações (retas, circunferências, parábolas, elipses e hipérboles). A geometria analítica permite, entre outras coisas, calcular a distância entre pontos conhecendo suas coordenadas, calcular a distância de um ponto a uma reta e determinar o ângulo entre duas retas conhecendo suas equações.

Quando consideramos dois eixos perpendiculares e orientados dividindo um plano, temos a ideia de plano cartesiano, que é um sistema de coordenadas. O ponto de encontro dos eixos é a origem do sistema.

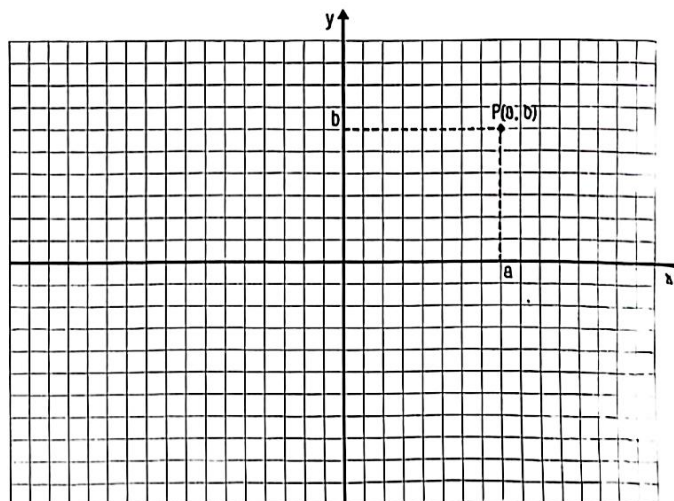
Como os eixos são orientados, convencionou-se que a seta indica o sentido positivo.



Além disso, é importante destacar que:

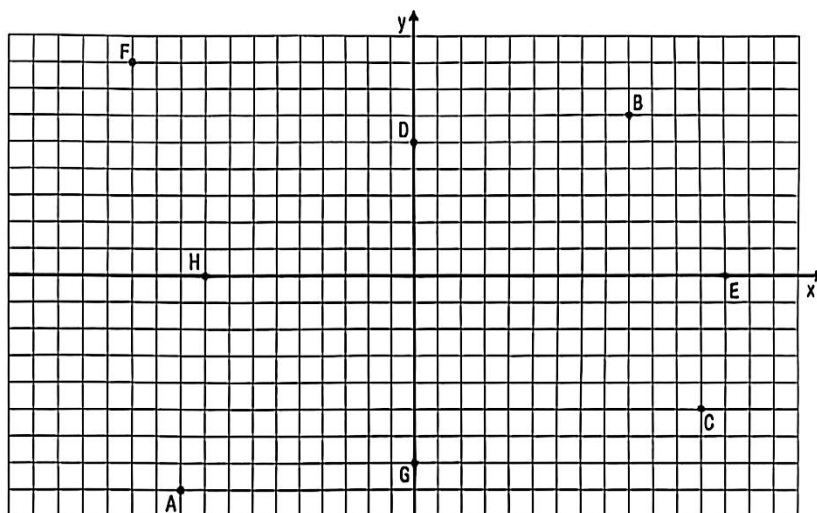
- o eixo horizontal, representado por x , é o eixo das abscissas;
- o eixo vertical, representado por y , é o eixo das ordenadas;
- os eixos dividem o plano em quatro quadrantes, como na figura acima;
- os eixos são graduados e ambos utilizam a mesma unidade de medida. Podemos localizar qualquer ponto do plano por meio de suas coordenadas.

Assim, no plano cartesiano ao lado, representamos o ponto P , de coordenadas a e b , com a indicando a abscissa de P e b indicando a ordenada de P . Note que as linhas tracejadas para localizar o ponto P são traçadas paralelamente aos eixos coordenados.



Num sistema de coordenadas cartesianas, há uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é, a cada ponto do plano, associamos um par ordenado e, reciprocamente, a cada par ordenado, associamos um ponto do plano.

No plano cartesiano a seguir, estão representados alguns pontos. Cada quadradinho tem o lado medindo 1 unidade de comprimento.



- Complete a tabela com as coordenadas dos pontos.

Ponto	Abscissa	Ordenada	Coordenadas
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

- Responda às questões propostas.

a) Se um ponto pertence ao 1º quadrante, o que é possível afirmar sobre suas coordenadas?

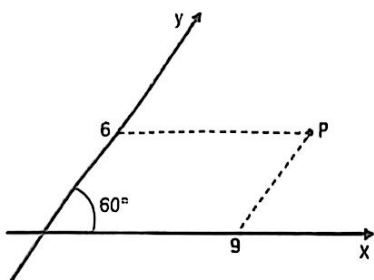
b) E se o ponto pertencer ao 3º quadrante?

O que se pode afirmar sobre as coordenadas de um ponto que pertence ao eixo das abscissas?

d) E se ele pertence ao eixo das ordenadas?

e) Você pode pensar na distância do ponto B à origem do sistema de coordenadas cartesianas como hipotenusa de um triângulo retângulo. Desenhe-o no plano cartesiano e calcule essa distância.

O ângulo entre os dois eixos coordenados pode ser reto ou outro qualquer. Vamos considerar uma situação em que os dois eixos coordenados formam um ângulo de 60° .



a) Quais as coordenadas do ponto P?

$(9, 6)$

b) Qual é a medida do maior ângulo formado pelos eixos coordenados?

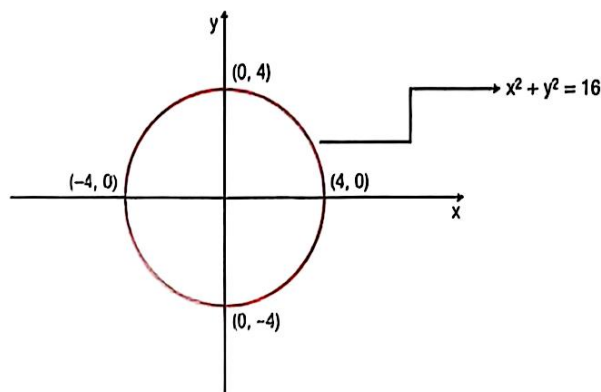
c) Como você calcularia a distância do ponto P à origem do sistema de coordenadas cartesianas?

d) É mais simples trabalhar com qual ângulo entre os dois eixos coordenados?

Conexões

A geometria analítica teve como precursores dois personagens franceses contemporâneos: Pierre de Fermat e René Descartes. Suas contribuições desenvolveram o que hoje chamamos de geometria analítica.

Como na maioria das grandes elaborações teóricas, a ideia básica da criação é dotada de simplicidade: o plano cartesiano é utilizado para representar pontos, retas e curvas com o intuito de conferir tratamento algébrico a ideias geométricas.



Por exemplo, a circunferência acima, que tem o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e raio igual a 4, pode ser representada pela equação $x^2 + y^2 = 16$. Assim, essa figura geométrica chamada circunferência é tratada e analisada com base nessa equação.



Pierre de Fermat



René Descartes

Distância entre dois pontos

Por meio de aplicativos em aparelhos móveis, podemos descobrir, por exemplo, em uma viagem entre dois locais, não apenas a distância de condução como também o tempo médio estimado para percorrer tal trajeto.

O cálculo da distância em linha reta pode ser feito com base nas coordenadas geográficas que são representadas como um par ordenado no plano cartesiano.

No plano cartesiano, o cálculo da distância entre dois pontos é feito com base nas coordenadas cartesianas desses dois pontos. Antes de obtermos uma relação que permita determinar essa distância, analise a seguir três situações.



Situação 1

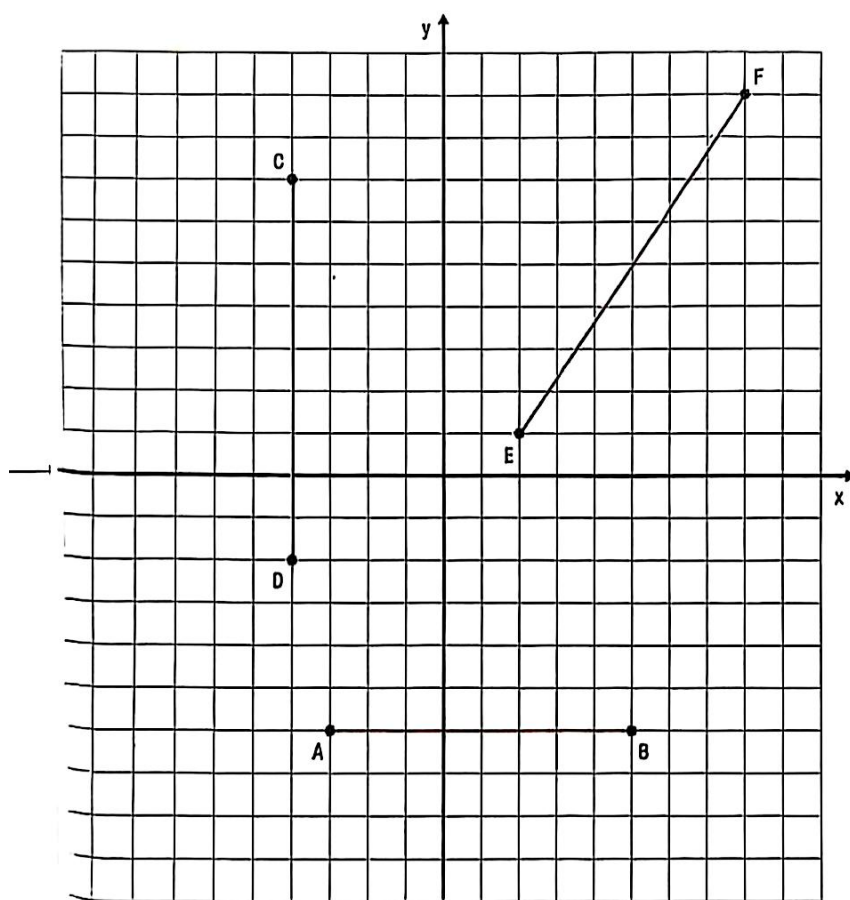
Como você calcula a distância entre os pontos A e B?

Situação 2

Como você calcula a distância entre os pontos C e D?

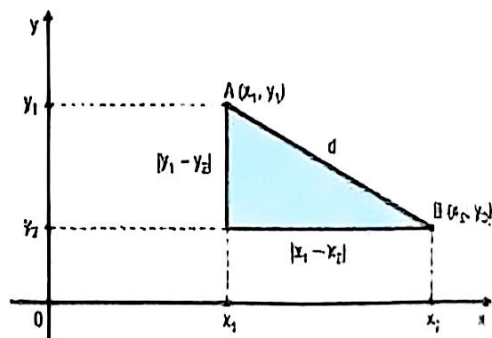
Situação 3

Como você calcula a distância entre os pontos E e F?



Agora que você analisou as três situações, vamos considerar uma em que os pontos A e B têm coordenadas genéricas, como evidenciado na figura ao lado.

A hipotenusa do triângulo retângulo indica a distância entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ representados.



Um dos catetos tem medida igual ao módulo da diferença entre as abscissas, e a medida do outro é igual ao módulo da diferença entre as ordenadas. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}d^2 &= |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 \\|x_1 - x_2|^2 &= (x_1 - x_2)^2 \text{ e } |y_1 - y_2|^2 = (y_1 - y_2)^2 \\d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\end{aligned}$$

Dados dois pontos quaisquer $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância d entre eles é dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Essa relação pode ser utilizada em qualquer situação, desde que conheçamos as coordenadas desses pontos. Caso eles tenham a mesma abscissa ou a mesma ordenada, a distância pode ser obtida por meio do conceito de módulo de um número. Assim, se os pontos A e B tiverem a mesma ordenada, ou seja, $A(x_1, k)$ e $B(x_2, k)$, a distância entre eles será dada por $d = |x_1 - x_2|$. Caso os pontos A e B tenham a mesma abscissa, ou seja, $A(k, y_1)$ e $B(k, y_2)$, a distância entre eles será dada por $d = |y_1 - y_2|$.

y
x



Atividades

1. Determine a distância entre os pontos A e B, sendo:

a) $A(-2, 4)$ e $B(3, 5)$

$$\begin{aligned}d_{AB} &= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (4 - 5)^2} \\&= \sqrt{5^2 + 1^2} \\&= \sqrt{25 + 1} \\&= \sqrt{26}\end{aligned}$$

b) $A(0, 5)$ e $B(5, 10)$

$$\begin{aligned}d_{AB} &= \sqrt{(0 - 5)^2 + (5 - 10)^2} \\&= \sqrt{5^2 + (-5)^2} \\&= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

c) $A(\sqrt{2}, 4)$ e $B(-3\sqrt{2}, 5)$

$$\begin{aligned}d_{AB} &= \sqrt{(\sqrt{2} - (-3\sqrt{2}))^2 + (4 - 5)^2} \\&= \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 1^2} \\&= \sqrt{32 + 1} \\&= \sqrt{33}\end{aligned}$$

Volume 9 $16 \cdot 2 = 32 + 1 = 33$

$$d_{AP} = d_{BP}$$

2. Considere que o ponto $P(k, 2)$ é equidistante dos pontos $A(2, 4)$ e $B(3, 1)$. Determine o valor da constante real k .

$$\begin{aligned}d_{AP} &= d_{BP} \\ \sqrt{(k-2)^2 + (2-4)^2} &= \sqrt{(k-3)^2 + (2-1)^2} \\ k^2 - 2 \cdot k \cdot 2 + 2^2 + (-2)^2 &= k^2 - 2 \cdot k \cdot 3 + 3^2 + 1^2\end{aligned}$$

$$-4k + 4 + 4 = -6k + 9 + 1$$

$$\begin{aligned}-4k + 8 &= -6k + 10 \\ 6k - 4k &= 10 - 8 \\ 2k &= 2 \\ k &= 1\end{aligned}$$

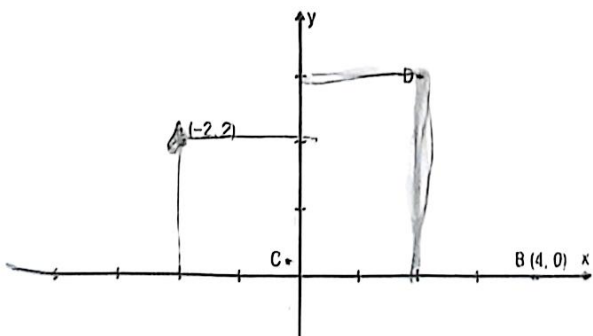
3. No plano cartesiano, os pontos A e B têm coordenadas dadas em função de um ângulo α , isto é: $A(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ e $B(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Nessas condições, determine a distância entre esses dois pontos.

4. (UFF – RJ) Determine o(s) valor(es) que r deve assumir para que o ponto $(r, 2)$ diste cinco unidades do ponto $(0, -2)$.

5. No plano cartesiano, foi construído um triângulo ABC tal que $A(2, 2)$, $B(5, 4)$ e $C(3, 6)$. Determine o perímetro desse triângulo.

6. Determine o valor da constante real k para que o triângulo ABC no plano cartesiano, com vértices $A(k, 4)$, $B(-7, 2k - 1)$ e $C(0, 0)$, seja retângulo no vértice C.

7. (UEG – GO) Duas antenas de celular A e B com raio de cobertura de 2 km e 4 km, respectivamente, estão posicionadas em uma certa cidade nos pontos indicados no plano cartesiano abaixo.



Em relação aos pontos $C(-1/5, 1/5)$ e $D(2, 3)$, verifica-se que

- a) C não pertence à cobertura de A nem de B.
- b) C pertence somente à cobertura de A.
- c) C pertence somente à cobertura de B.
- d) D não pertence à cobertura de A nem de B.

8. (IBMEC – RJ) O triângulo ABC é isósceles, com $AB = AC$.

Os vértices B e C são, respectivamente, $(15, 1)$ e $(19, 3)$.

Se o vértice A pertence ao eixo das ordenadas (Oy), sua ordenada é igual a:

- a) 35
- b) 36
- c) 37
- d) 38
- e) 39

9. (UFMG) Os pontos $A = (0, 3)$, $B = (4, 0)$ e $C = (a, b)$ são vértices de um triângulo equilátero no plano cartesiano. Considerando-se essa situação, é correto afirmar que

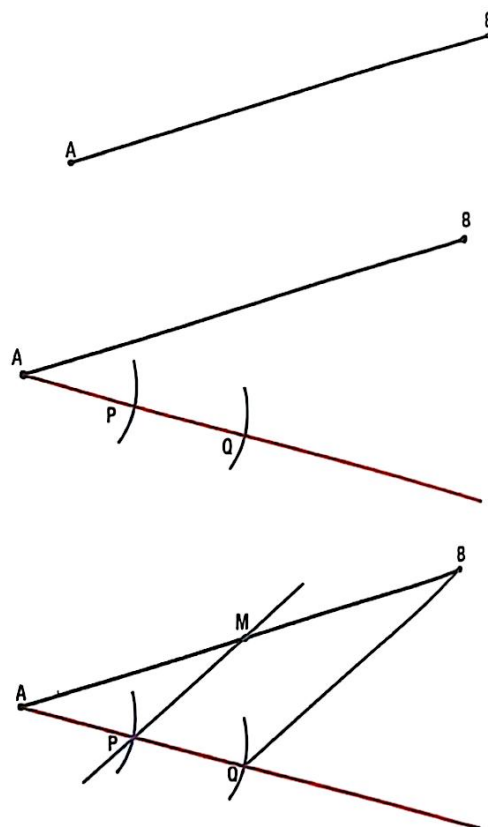
- a) $b = \frac{4}{3}a$
- b) $b = \frac{4}{3}a - \frac{7}{6}$
- c) $b = \frac{4}{3}a + 3$
- d) $b = \frac{4}{3}a - \frac{3}{2}$

Ponto médio

Há um procedimento bem interessante para determinar geometricamente o ponto médio de um segmento. Observe como encontramos o ponto médio do segmento AB representado ao lado.

A partir do ponto A, trace outro segmento (vermelho) e, com a ponta-seca de um compasso no ponto A e uma abertura qualquer, marque um ponto P nesse segmento. Depois, com a ponta-seca no ponto P e a mesma abertura do compasso, marque um ponto Q.

Com uma régua, trace o segmento que liga os pontos Q e B. Com o auxílio de um esquadro, trace uma paralela ao segmento QB a partir do ponto P. O ponto M determinado no segmento AB é o ponto médio desse segmento.



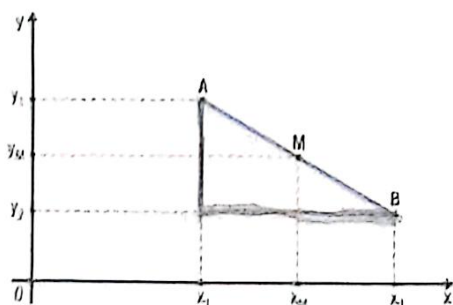
No plano cartesiano, para fazer a determinação do ponto médio, precisamos conhecer as coordenadas dos pontos extremos do segmento.

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ de um plano cartesiano, o ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento de extremidade nesses pontos é tal que:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Observe que a abscissa do ponto médio é a média aritmética das abscissas dos pontos A e B dados, enquanto a ordenada do ponto médio é a média aritmética das ordenadas dos pontos A e B.

Você é capaz de fazer a verificação desse resultado usando semelhança de triângulos. Tente fazer isso com base na figura.



Coordenadas do baricentro de um triângulo

O baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção de suas medianas. Mediana é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele. Podemos mostrar que as coordenadas do baricentro podem ser obtidas por meio das coordenadas dos vértices do triângulo.

Seja $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ as coordenadas dos vértices do triângulo, $M(x_M, y_M)$ as coordenadas do ponto médio do lado $\overline{AB}$ e $G(x_G, y_G)$ as coordenadas do baricentro, temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \quad (I)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B \quad (II)$$

O baricentro de um triângulo divide qualquer mediana na razão 2:1, a partir de cada um dos seus vértices, ou seja, a distância entre os pontos C e G é duas vezes a distância entre os pontos G e M .

$$CG = 2 \cdot GM$$

$$\bullet x_G - x_C = 2 \cdot (x_M - x_G) \Rightarrow x_G - x_C = 2x_M - 2x_G \Rightarrow 3x_G = 2x_M + x_C \quad (III)$$

$$\bullet y_G - y_C = 2 \cdot (y_M - y_G) \Rightarrow y_G - y_C = 2y_M - 2y_G \Rightarrow 3y_G = 2y_M + y_C \quad (IV)$$

Substituindo (I) em (III) e (II) em (IV), temos:

$$3x_G = x_A + x_B + x_C$$

$$3y_G = y_A + y_B + y_C$$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$\sqrt{48} \\ \sqrt{16 \cdot 3} \\ 4\sqrt{3}$$

média $\rightarrow$ $\frac{\text{soma de todos os participantes}}{\text{nº de participantes}}$

$\frac{4 + (-6) + (-2)}{3} = \frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$

$\frac{1 + (-4) + (-3)}{3} = \frac{-6}{3} = -2$

$\frac{12}{2} = 6$

$\frac{-8 + (-4)}{2} = \frac{-12}{2} = -6$

$\frac{-5 + (-5)}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

$\frac{-8}{2} = -4$

$\frac{-6}{2} = -3$

$\frac{-4}{2} = -2$

$\frac{-2}{2} = -1$

$\frac{-1}{2} = -0.5$

$\frac{-0.5}{2} = -0.25$

$\frac{-0.25}{2} = -0.125$

$\frac{-0.125}{2} = -0.0625$

$\frac{-0.0625}{2} = -0.03125$

$\frac{-0.03125}{2} = -0.015625$

$\frac{-0.015625}{2} = -0.0078125$

$\frac{-0.0078125}{2} = -0.00390625$

$\frac{-0.00390625}{2} = -0.001953125$

$\frac{-0.001953125}{2} = -0.0009765625$

$\frac{-0.0009765625}{2} = -0.00048828125$

$\frac{-0.00048828125}{2} = -0.000244140625$

$\frac{-0.000244140625}{2} = -0.0001220703125$

$\frac{-0.0001220703125}{2} = -6.103515625 \times 10^{-5}$

$\frac{-6.103515625 \times 10^{-5}}{2} = -3.0517578125 \times 10^{-5}$

$\frac{-3.0517578125 \times 10^{-5}}{2} = -1.52587890625 \times 10^{-5}$

$\frac{-1.52587890625 \times 10^{-5}}{2} = -7.62939453125 \times 10^{-6}$

$\frac{-7.62939453125 \times 10^{-6}}{2} = -3.814697265625 \times 10^{-6}$

$\frac{-3.814697265625 \times 10^{-6}}{2} = -1.9073486328125 \times 10^{-6}$

$\frac{-1.9073486328125 \times 10^{-6}}{2} = -9.5367431640625 \times 10^{-7}$

$\frac{-9.5367431640625 \times 10^{-7}}{2} = -4.76837158203125 \times 10^{-7}$

$\frac{-4.76837158203125 \times 10^{-7}}{2} = -2.384185791015625 \times 10^{-7}$

$\frac{-2.384185791015625 \times 10^{-7}}{2} = -1.1920928955078125 \times 10^{-7}$

$\frac{-1.1920928955078125 \times 10^{-7}}{2} = -5.9604644775390625 \times 10^{-8}$

$\frac{-5.9604644775390625 \times 10^{-8}}{2} = -2.9802322387695312 \times 10^{-8}$

$\frac{-2.9802322387695312 \times 10^{-8}}{2} = -1.4901161193847656 \times 10^{-8}$

$\frac{-1.4901161193847656 \times 10^{-8}}{2} = -7.450580596923828 \times 10^{-9}$

$\frac{-7.450580596923828 \times 10^{-9}}{2} = -3.725290298461914 \times 10^{-9}$

$\frac{-3.725290298461914 \times 10^{-9}}{2} = -1.862645149230957 \times 10^{-9}$

$\frac{-1.862645149230957 \times 10^{-9}}{2} = -9.313225746154785 \times 10^{-10}$

$\frac{-9.313225746154785 \times 10^{-10}}{2} = -4.656612873077392 \times 10^{-10}$

$\frac{-4.656612873077392 \times 10^{-10}}{2} = -2.328306436538696 \times 10^{-10}$

$\frac{-2.328306436538696 \times 10^{-10}}{2} = -1.164153218269348 \times 10^{-10}$

$\frac{-1.164153218269348 \times 10^{-10}}{2} = -5.82076609134674 \times 10^{-11}$

$\frac{-5.82076609134674 \times 10^{-11}}{2} = -2.91038304567337 \times 10^{-11}$

$\frac{-2.91038304567337 \times 10^{-11}}{2} = -1.455191522836685 \times 10^{-11}$

$\frac{-1.455191522836685 \times 10^{-11}}{2} = -7.275957614183425 \times 10^{-12}$

$\frac{-7.275957614183425 \times 10^{-12}}{2} = -3.6379788070917125 \times 10^{-12}$

$\frac{-3.6379788070917125 \times 10^{-12}}{2} = -1.8189894035458562 \times 10^{-12}$

$\frac{-1.8189894035458562 \times 10^{-12}}{2} = -9.094947017729281 \times 10^{-13}$

$\frac{-9.094947017729281 \times 10^{-13}}{2} = -4.5474735088646405 \times 10^{-13}$

$\frac{-4.5474735088646405 \times 10^{-13}}{2} = -2.2737367544323202 \times 10^{-13}$

$\frac{-2.2737367544323202 \times 10^{-13}}{2} = -1.1368683772161601 \times 10^{-13}$

$\frac{-1.1368683772161601 \times 10^{-13}}{2} = -5.6843418860808005 \times 10^{-14}$

$\frac{-5.6843418860808005 \times 10^{-14}}{2} = -2.8421709430404002 \times 10^{-14}$

$\frac{-2.8421709430404002 \times 10^{-14}}{2} = -1.4210854715202001 \times 10^{-14}$

$\frac{-1.4210854715202001 \times 10^{-14}}{2} = -7.1054273576010005 \times 10^{-15}$

$\frac{-7.1054273576010005 \times 10^{-15}}{2} = -3.5527136788005002 \times 10^{-15}$

$\frac{-3.5527136788005002 \times 10^{-15}}{2} = -1.7763568394002501 \times 10^{-15}$

$\frac{-1.7763568394002501 \times 10^{-15}}{2} = -8.8817841970012505 \times 10^{-16}$

$\frac{-8.8817841970012505 \times 10^{-16}}{2} = -4.4408920985006252 \times 10^{-16}$

$\frac{-4.4408920985006252 \times 10^{-16}}{2} = -2.2204460492503126 \times 10^{-16}$

$\frac{-2.2204460492503126 \times 10^{-16}}{2} = -1.1102230246251563 \times 10^{-16}$

$\frac{-1.1102230246251563 \times 10^{-16}}{2} = -5.551115123125781 \times 10^{-17}$

$\frac{-5.551115123125781 \times 10^{-17}}{2} = -2.7755575615628905 \times 10^{-17}$

$\frac{-2.7755575615628905 \times 10^{-17}}{2} = -1.3877787807814452 \times 10^{-17}$

$\frac{-1.3877787807814452 \times 10^{-17}}{2} = -6.938893903907226 \times 10^{-18}$

$\frac{-6.938893903907226 \times 10^{-18}}{2} = -3.469446951953613 \times 10^{-18}$

$\frac{-3.469446951953613 \times 10^{-18}}{2} = -1.7347234759768065 \times 10^{-18}$

$\frac{-1.7347234759768065 \times 10^{-18}}{2} = -8.673617379884032 \times 10^{-19}$

$\frac{-8.673617379884032 \times 10^{-19}}{2} = -4.336808689942016 \times 10^{-19}$

$\frac{-4.336808689942016 \times 10^{-19}}{2} = -2.168404344971008 \times 10^{-19}$

$\frac{-2.168404344971008 \times 10^{-19}}{2} = -1.084202172485504 \times 10^{-19}$

$\frac{-1.084202172485504 \times 10^{-19}}{2} = -5.42101086242752 \times 10^{-20}$

$\frac{-5.42101086242752 \times 10^{-20}}{2} = -2.71050543121376 \times 10^{-20}$

$\frac{-2.71050543121376 \times 10^{-20}}{2} = -1.35525271560688 \times 10^{-20}$

$\frac{-1.35525271560688 \times 10^{-20}}{2} = -6.7762635780344 \times 10^{-21}$

$\frac{-6.7762635780344 \times 10^{-21}}{2} = -3.3881317890172 \times 10^{-21}$

$\frac{-3.3881317890172 \times 10^{-21}}{2} = -1.6940658945086 \times 10^{-21}$

$\frac{-1.6940658945086 \times 10^{-21}}{2} = -8.470329472543 \times 10^{-22}$

$\frac{-8.470329472543 \times 10^{-22}}{2} = -4.2351647362715 \times 10^{-22}$

$\frac{-4.2351647362715 \times 10^{-22}}{2} = -2.11758236813575 \times 10^{-22}$

$\frac{-2.11758236813575 \times 10^{-22}}{2} = -1.058791184067875 \times 10^{-22}$

$\frac{-1.058791184067875 \times 10^{-22}}{2} = -5.293955920339375 \times 10^{-23}$

$\frac{-5.293955920339375 \times 10^{-23}}{2} = -2.6469779601696875 \times 10^{-23}$

$\frac{-2.6469779601696875 \times 10^{-23}}{2} = -1.3234889800848437 \times 10^{-23}$

$\frac{-1.3234889800848437 \times 10^{-23}}{2} = -6.6174449004242185 \times 10^{-24}$

$\frac{-6.6174449004242185 \times 10^{-24}}{2} = -3.3087224502121092 \times 10^{-24}$

$\frac{-3.3087224502121092 \times 10^{-24}}{2} = -1.6543612251060546 \times 10^{-24}$

$\frac{-1.6543612251060546 \times 10^{-24}}{2} = -8.271806125530273 \times 10^{-25}$

$\frac{-8.271806125530273 \times 10^{-25}}{2} = -4.1359030627651365 \times 10^{-25}$

$\frac{-4.1359030627651365 \times 10^{-25}}{2} = -2.0679515313825682 \times 10^{-25}$

$\frac{-2.0679515313825682 \times 10^{-25}}{2} = -1.0339757656912841 \times 10^{-25}$

$\frac{-1.0339757656912841 \times 10^{-25}}{2} = -5.1698788284564205 \times 10^{-26}$

$\frac{-5.1698788284564205 \times 10^{-26}}{2} = -2.5849394142282102 \times 10^{-26}$

$\frac{-2.5849394142282102 \times 10^{-26}}{2} = -1.2924697071141051 \times 10^{-26}$

$\frac{-1.2924697071141051 \times 10^{-26}}{2} = -6.4623485355705255 \times 10^{-27}$

$\frac{-6.4623485355705255 \times 10^{-27}}{2} = -3.2311742677852627 \times 10^{-27}$

$\frac{-3.2311742677852627 \times 10^{-27}}{2} = -1.6155871338926313 \times 10^{-27}$

$\frac{-1.6155871338926313 \times 10^{-27}}{2} = -8.077935669463156 \times 10^{-28}$

$\frac{-8.077935669463156 \times 10^{-28}}{2} = -4.038967834731578 \times 10^{-28}$

$\frac{-4.038967834731578 \times 10^{-28}}{2} = -2.019483917365789 \times 10^{-28}$

$\frac{-2.019483917365789 \times 10^{-28}}{2} = -1.0097419586828945 \times 10^{-28}$

$\frac{-1.0097419586828945 \times 10^{-28}}{2} = -5.0487097934144725 \times 10^{-29}$

$\frac{-5.0487097934144725 \times 10^{-29}}{2} = -2.5243548967072362 \times 10^{-29}$

$\frac{-2.5243548967072362 \times 10^{-29}}{2} = -1.2621774483536181 \times 10^{-29}$

$\frac{-1.2621774483536181 \times 10^{-29}}{2} = -6.3108872417680905 \times 10^{-30}$

$\frac{-6.3108872417680905 \times 10^{-30}}{2} = -3.1554436208840452 \times 10^{-30}$

$\frac{-3.1554436208840452 \times 10^{-30}}{2} = -1.5777218104420226 \times 10^{-30}$

$\frac{-1.5777218104420226 \times 10^{-30}}{2} = -7.888609052210113 \times 10^{-31}$

$\frac{-7.888609052210113 \times 10^{-31}}{2} = -3.9443045261050565 \times 10^{-31}$

$\frac{-3.9443045261050565 \times 10^{-31}}{2} = -1.9721522630525282 \times 10^{-31}$

$\frac{-1.9721522630525282 \times 10^{-31}}{2} = -9.860761315262641 \times 10^{-32}$

$\frac{-9.860761315262641 \times 10^{-32}}{2} = -4.9303806576313205 \times 10^{-32}$

$\frac{-4.9303806576313205 \times 10^{-32}}{2} = -2.4651903288156602 \times 10^{-32}$

$\frac{-2.4651903288156602 \times 10^{-32}}{2} = -1.2325951644078301 \times 10^{-32}$

$\frac{-1.2325951644078301 \times 10^{-32}}{2} = -6.1629758220391505 \times 10^{-33}$

$\frac{-6.1629758220391505 \times 10^{-33}}{2} = -3.0814879110195752 \times 10^{-33}$

$\frac{-3.0814879110195752 \times 10^{-33}}{2} = -1.5407439555097876 \times 10^{-33}$

$\frac{-1.5407439555097876 \times 10^{-33}}{2} = -7.703719777548938 \times 10^{-34}$

$\frac{-7.703719777548938 \times 10^{-34}}{2} = -3.851859888774469 \times 10^{-34}$

$\frac{-3.851859888774469 \times 10^{-34}}{2} = -1.9259299443872345 \times 10^{-34}$

$\frac{-1.9259299443872345 \times 10^{-34}}{2} = -9.629649721936172 \times 10^{-35}$

$\frac{-9.629649721936172 \times 10^{-35}}{2} = -4.814824860968086 \times 10^{-35}$

$\frac{-4.814824860968086 \times 10^{-35}}{2} = -2.407412430484043 \times 10^{-35}$

$\frac{-2.407412430484043 \times 10^{-35}}{2} = -1.2037062152420215 \times 10^{-35}$

$\frac{-1.2037062152420215 \times 10^{-35}}{2} = -6.0185310762101075 \times 10^{-36}$

$\frac{-6.0185310762101075 \times 10^{-36}}{2} = -3.0092655381050537 \times 10^{-36}$

$\frac{-3.0092655381050537 \times 10^{-36}}{2} = -1.5046327690525268 \times 10^{-36}$

$\frac{-1.5046327690525268 \times 10^{-36}}{2} = -7.523163845262634 \times 10^{-37}$

$\frac{-7.523163845262634 \times 10^{-37}}{2} = -3.761581922631317 \times 10^{-37}$

$\frac{-3.761581922631317 \times 10^{-37}}{2} = -1.8807909613156585 \times 10^{-37}$

$\frac{-1.8807909613156585 \times 10^{-37}}{2} = -9.403954806578292 \times 10^{-38}$

$\frac{-9.403954806578292 \times 10^{-38}}{2} = -4.701977403289146 \times 10^{-38}$

$\frac{-4.701977403289146 \times 10^{-38}}{2} = -2.350988701644573 \times 10^{-38}$

$\frac{-2.350988701644573 \times 10^{-38}}{2} = -1.1754943508222865 \times 10^{-38}$

$\frac{-1.1754943508222865 \times 10^{-38}}{2} = -5.8774717541114325 \times 10^{-39}$

$\frac{-5.8774717541114325 \times 10^{-39}}{2} = -2.9387358770557162 \times 10^{-39}$

$\frac{-2.9387358770557162 \times 10^{-39}}{2} = -1.4693679385278581 \times 10^{-39}$

$\frac{-1.4693679385278581 \times 10^{-39}}{2} = -7.3468396926392905 \times 10^{-40}$

$\frac{-7.3468396926392905 \times 10^{-40}}{2} = -3.6734198463196452 \times 10^{-40}$

$\frac{-3.6734198463196452 \times 10^{-40}}{2} = -1.8367099231598226 \times 10^{-40}$

$\frac{-1.8367099231598226 \times 10^{-40}}{2} = -9.183549615799113 \times 10^{-41}$

$\frac{-9.183549615799113 \times 10^{-41}}{2} = -4.5917748078995565 \times 10^{-41}$

$\frac{-4.5917748078995565 \times 10^{-41}}{2} = -2.2958874039497782 \times 10^{-41}$

$\frac{-2.2958874039497782 \times 10^{-41}}{2} = -1.1479437019748891 \times 10^{-41}$

$\frac{-1.1479437019748891 \times 10^{-41}}{2} = -5.7397185098744455 \times 10^{-42}$

$\frac{-5.7397185098744455 \times 10^{-42}}{2} = -2.8698592549372227 \times 10^{-42}$

$\frac{-2.8698592549372227 \times 10^{-42}}{2} = -1.4349296274686113 \times 10^{-42}$

$\frac{-1.4349296274686113 \times 10^{-42}}{2} = -7.1746481373430565 \times 10^{-43}$

$\frac{-7.1746481373430565 \times 10^{-43}}{2} = -3.5873240686715282 \times 10^{-43}$

$\frac{-3.5873240686715282 \times 10^{-43}}{2} = -1.7936620343357641 \times 10^{-43}$

$\frac{-1.7936620343357641 \times 10^{-43}}{2} = -8.9683101716788205 \times 10^{-44}$

$\frac{-8.9683101716788205 \times 10^{-44}}{2} = -4.4841550858394102 \times 10^{-44}$

$\frac{-4.4841550858394102 \times 10^{-44}}{2} = -2.2420775429197051 \times 10^{-44}$

$\frac{-2.2420775429197051 \times 10^{-44}}{2} = -1.1210387714598525 \times 10^{-44}$

$\frac{-1.1210387714598525 \times 10^{-44}}{2} = -5.6051938572992625 \times 10^{-45}$

$\frac{-5.6051938572992625 \times 10^{-45}}{2} = -2.8025969286496312 \times 10^{-45}$

$\frac{-2.8025969286496312 \times 10^{-45}}{2} = -1.4012984643248156 \times 10^{-45}$

$\frac{-1.4012984643248156 \times 10^{-45}}{2} = -7.006492321624078 \times 10^{-46}$

$\frac{-7.006492321624078 \times 10^{-46}}{2} = -3.503246160812039 \times 10^{-46}$

$\frac{-3.503246160812039 \times 10^{-46}}{2} = -1.7516230804060195 \times 10^{-46}$

$\frac{-1.7516230804060195 \times 10^{-46}}{2} = -8.7581154020300975 \times 10^{-47}$

$\frac{-8.7581154020300975 \times 10^{-47}}{2} = -4.3790577010150487 \times 10^{-47}$

$\frac{-4.3790577010150487 \times 10^{-47}}{2} = -2.1895288505075243 \times 10^{-47}$

$\frac{-2.1895288505075243 \times 10^{-47}}{2} = -1.0947644252537621 \times 10^{-47}$

$\frac{-1.0947644252537621 \times 10^{-47}}{2} = -5.4738221262688105 \times 10^{-48}$

$\frac{-5.4738221262688105 \times 10^{-48}}{2} = -2.7369110631344052 \times 10^{-48}$

$\frac{-2.7369110631344052 \times 10^{-48}}{2} = -1.3684555315672026 \times 10^{-48}$

$\frac{-1.3684555315672026 \times 10^{-48}}{2} = -6.842277657836013 \times 10^{-49}$

$\frac{-6.842277657836013 \times 10^{-49}}{2} = -3.4211388289180065 \times 10^{-49}$

$\frac{-3.4211388289180065 \times 10^{-49}}{2} = -1.7105694144590032 \times 10^{-49}$

$\frac{-1.7105694144590032 \times 10^{-49}}{2} = -8.552847072295016 \times 10^{-50}$

$\frac{-8.552847072295016 \times 10^{-50}}{2} = -4.276423536147508 \times 10^{-50}$

$\frac{-4.276423536147508 \times 10^{-50}}{2} = -2.138211768073754 \times 10^{-50}$

$\frac{-2.138211768073754 \times 10^{-50}}{2} = -1.069105884036877 \times 10^{-50}$

$\frac{-1.069105884036877 \times 10^{-50}}{2} = -5.34552942018438$

3. Um paralelogramo ABCD está representado num plano cartesiano de tal maneira que seus vértices são os pontos A(1, 5), B(-1, 1), C(2, 4) e D(x_D , y_D). Considerando que as diagonais AC e BD se intersectam nos seus pontos médios, determine as coordenadas do vértice D.

$$M_{AC} = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{5+4}{2} \right) \rightarrow M \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right) \Rightarrow M \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

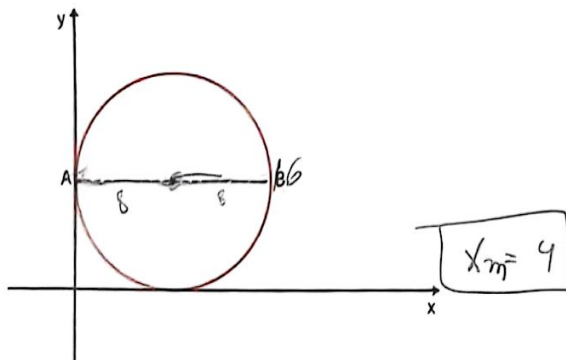
ou

$$M_{BD} = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{-1 + x_D}{2} \quad \frac{9}{2} = \frac{1 + y_D}{2} \Rightarrow D(4, 8)$$

$$-1 + x_D = 3 \quad 1 + y_D = 9 \Rightarrow \boxed{x_D = 4} \quad \boxed{y_D = 8}$$

4. Considere que os pontos A(0, 8) e B(16, 8) são extremidades do diâmetro da circunferência.



Nessas condições:

- a) determine a medida do diâmetro da circunferência;

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(16 - 0)^2 + (8 - 8)^2}$$

$$= \sqrt{16^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{16^2} \Rightarrow d_{AB} = 16$$

- b) obtenha as coordenadas do centro da circunferência.

$$\frac{16}{2} = 8$$

5. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo de vértices nos pontos A(-3, 5), B(4, 8) e C(2, 3).

$$x_G = \frac{-3 + 4 + 2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y_G = \frac{5 + 8 + 3}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

6. Em um triângulo ABC, as coordenadas do vértice A e do baricentro G são, respectivamente, (1, 2) e (3, -4). Determine as coordenadas do ponto médio do lado BC.

$$x_m = \frac{x_b + x_c}{2}$$

$$y_m = \frac{y_b + y_c}{2}$$

$$x_b + x_c = 2x_m$$

$$y_b + y_c = 2y_m$$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$3 = \frac{1 + 2x_m}{3}$$

$$\frac{-4}{1} = \frac{2 + 2y_m}{3}$$

$$9 = 1 + 2x_m$$

$$-12 = 2 + 2y_m$$

$$8 = 2x_m$$

$$\frac{-14}{2} = \frac{2 + 2y_m}{2}$$

7. (FGV - SP) No plano cartesiano, M(3, 3), N(7, 0) e P(4, 0) são os pontos médios respectivamente dos lados AB, BC e AC de um triângulo ABC. A abscissa do vértice C é:

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

UC Minas – MG) M é o ponto médio do segmento de retas A(4, 0) e B(0, -2). A medida da distância de M ao ponto P(-1, 3), em unidades de comprimento, é:

- a) 4 b) $2\sqrt{5}$ c) 5 d) $\sqrt{26}$ e) $\sqrt{34}$

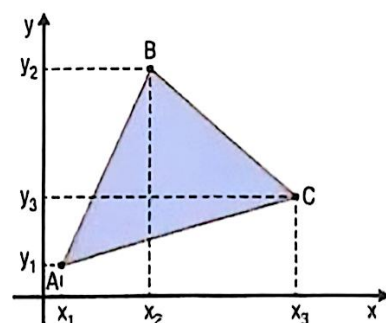
9. (UEMA) Considere um triângulo ABC, com vértices nos pontos A(0, 0), B(4, 3) e C(6, 2). A medida da mediana M_B , relativa ao vértice B desse triângulo, vale, em cm:

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{10}$

Área de um triângulo

Você viu anteriormente como podemos obter as coordenadas do ponto médio de um segmento dadas as coordenadas dos pontos correspondentes às extremidades desse segmento.

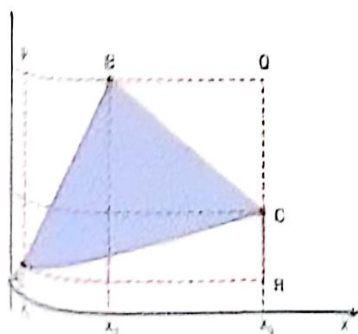
Outra interessante aplicação na geometria analítica está relacionada ao cálculo da área de um triângulo conhecendo-se as coordenadas de seus vértices.



A área A do triângulo de vértices nos pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ com } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

D é o determinante formado pelas coordenadas dos pontos correspondentes aos vértices do triângulo com uma coluna auxiliar (coluna de uns).



É possível confirmar esse resultado considerando as áreas do retângulo APQR e dos triângulos retângulos APB, BQC e ARC da figura ao lado, isto é:

$$A_{ABC} = A_{APQR} - (A_{APB} + A_{BQC} + A_{ARC})$$

panhe:

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad C(x_3, y_3) \quad P(x_1, y_2) \quad Q(x_3, y_2) \quad R(x_3, y_1)$$

$$A_{ABC} = A_{APQR} - A_{APB} - A_{ARC} - A_{BQC}$$

$$A_{APQR} = (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = x_3 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1$$

$$A_{APB} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{2} = \frac{x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1}{2}$$

$$A_{ARC} = \frac{(x_3 - x_1) \cdot (y_3 - y_1)}{2} = \frac{x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_1}{2}$$

$$A_{BQC} = \frac{(x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_3)}{2} = \frac{x_3 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= x_3 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1 - \left(\frac{x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1}{2} \right) - \\ &\quad - \left(\frac{x_3 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_1}{2} \right) - \left(\frac{x_3 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3}{2} \right) \\ 2 \cdot A_{ABC} &= 2x_3 \cdot y_2 - 2x_3 \cdot y_1 - 2x_1 \cdot y_2 + 2x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1 - \\ &\quad - x_3 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 \\ 2 \cdot A_{ABC} &= x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1 \\ A_{ABC} &= \frac{x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1}{2} \end{aligned}$$

A última expressão pode ser representada por um determinante de ordem 3.

$$A_{ABC} = \frac{x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dependendo do vértice escolhido para iniciar a identificação dos pontos e do sentido que usamos para identificar os outros, a ordem das linhas no determinante pode variar. Você já sabe que, quando trocamos entre si duas filas paralelas de uma matriz, o determinante dessa matriz troca de sinal.

Portanto, para evitar que a área obtida seja negativa, escrevemos que:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{matriz do } \Delta, \text{ determinante}}$$



Matemática em detalhes

Há uma maneira simplificada de calcular a área de um triângulo representado no plano cartesiano, baseada na

expressão obtida ao calcular o determinante $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ as coordenadas dos vértices do triângulo, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando esse determinante, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - y_1 x_2 - x_1 y_3 - y_2 x_3$$

Podemos organizar a escrita dessa expressão assim:

$$D = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1$$

Compare essa expressão com a que obtemos ao somar os produtos de dois em dois elementos do diagrama abaixo, conforme indicado pelas setas. Usamos a mesma regra de sinais do cálculo do determinante pela Regra de Sarrus.

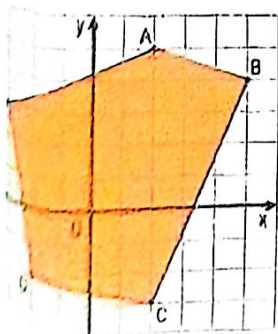
$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1$$

Esse procedimento pode ser adotado também para o cálculo da área de um polígono convexo representado no plano cartesiano. Assim, por exemplo, sendo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ..., (x_n, y_n) **vértices consecutivos** de um polígono convexo qualquer, a área A desse polígono é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| \text{ sendo } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

Observe que os vértices devem ser consecutivos. Assim, escolhemos um vértice qualquer como ponto de partida e percorremos o polígono sempre no mesmo sentido, até voltarmos ao vértice inicial.



Observe, ao lado, o pentágono ABCDE

Os pontos $A(2, 5)$, $B(5, 4)$, $C(2, -3)$, $D(-2, -2)$ e $E(-3, 3)$ são vértices de um pentágono convexo. Vamos calcular a área desse pentágono de dois modos. Primeiro, dividindo-o em três triângulos e, depois, usando a fórmula que você acabou de aprender.

Modo 1

Há mais de uma maneira de dividir o pentágono em três triângulos. Uma delas é:

Triângulo ABC

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |8 - 15 + 10 + 6 - 8 - 25| = 12$$

Triângulo ACD

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-6 - 4 - 10 + 4 - 6 - 10| = 16$$

Triângulo ADE

$$A_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-4 - 6 - 15 - 6 - 6 + 10| = 13,5$$

Portanto, a área do pentágono ABCDE é $12 + 16 + 13,5 = 41,5$ unidades de área.

Modo 2

Escolhemos um vértice inicial e um sentido. Por exemplo, vértice C e sentido anti-horário.

$$A_{ABCDE} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 5 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

o vértice inicial é
repetido no final

$$A_{ABCDE} = \frac{1}{2} \cdot |8 + 25 + 6 + 6 + 6 + 4 + 6 + 15 - 8 + 15|$$

$$A_{ABCDE} = 41,5$$

Agora, observe o resultado obtido em um cálculo como esse quando consideramos os pontos A(0, 2), B(4, 4) e C(8, 6) do plano cartesiano.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 0 + 24 + 16 - 8 - 32 - 0$$

$$\Delta = 0$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$$

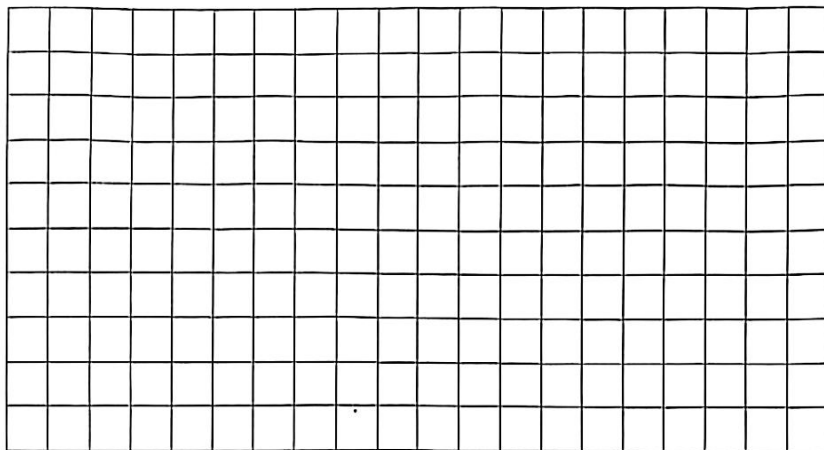
$$A = \frac{1}{2} \cdot |0|$$

$$A = 0$$

- Qual é a explicação para esse resultado ser igual a zero?

- Represente esses pontos em um plano cartesiano e confira.

$$A = \frac{|D|}{2}$$



A condição de alinhamento de três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ representados no plano cartesiano é:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Atividades

1. Utilizando a condição de alinhamento de três pontos, verifique, nos itens a seguir, se os pontos A, B e C estão ou não alinhados.

a) $A(-2, -3)$, $B(1, 3)$ e $C(7, 1)$

Handwritten solution for item 1a:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - (-3 \cdot 21) = -6 + 63 = 57$$

Since $D \neq 0$, the points are not aligned. $P = |27|$

2. Considere, no plano cartesiano, os pontos $P(k, 2)$, $Q(0, k-2)$ e $R(2, 5)$. Determine o valor de k para que os três pontos sejam colineares.

Handwritten solution for item 2:

$$D = \begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 2 & k-2 & 5 \end{vmatrix} = k(k-2) - 2(10) = k^2 - 2k - 20$$

$$k^2 - 2k - 20 = 0$$

$$(k-6)(k+4) = 0$$

$k = 6$ or $k = -4$

3. No plano cartesiano, um triângulo de vértices nos pontos $A(8, 3)$, $B(4, 7)$ e $C(2, k)$ tem área igual a 16 unidades de área. Nessas condições, qual é o valor de k ?

b) $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(7, 3)$

Handwritten solution for item 3b:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 19 = 2 - 19 = -17$$

Since $D \neq 0$, the points are not aligned.

Handwritten solution for item 3:

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & k \end{vmatrix} = 8(7k-7) - 4(3k-2) = 56k - 56 - 12k + 8 = 44k - 48$$

$$44k - 48 = 32$$

$$44k = 80$$

$$k = \frac{80}{44} = \frac{20}{11}$$

4. (UEL - PR) Considere os pontos A(4, 3), B(1, -1) e C(7, -1). A área do triângulo ABC, em unidades de área, é:

a) 24 b) 18 c) 16 ~~d) 12~~ e) 8

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4(-1-7) - 1(4-49) + 1(-4-21) = -4(-8) - 1(-45) + 1(-25) = 32 + 45 - 25 = 52$$

$$A = \frac{|D|}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

Handwritten note: 16 = 7-1, 1-7 = -6, 24 = 12-1

5. Um triângulo PQR tem vértices nos pontos P(1, 2), Q(3, 7) e R(6, 3). Determine:

a) a área do triângulo;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(7-42) - 2(3-42) + 7(18-42) = -35 + 78 - 140 = -97$$

Handwritten calculations:
 $DP - DQ = 23$
 $1 - 23 = -22$
 $\frac{-22}{2} = -11$
 $11,5$
 $23 - 51 = -28$
 $1 - 28 = -27$
 $\frac{-27}{2} = -13,5$

b) a medida da altura desse triângulo relativa ao lado QR.

Handwritten calculations:
 $QR = \sqrt{(3-6)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
 $A = \frac{b \cdot h}{2}$
 $11,5 = \frac{5 \cdot h}{2}$
 $23 = 5h$
 $h = 4,6$

6. (UEPB) Um quadrilátero cujos vértices são dados por E(-1, 0), F(-2, -2), G(-1, -4) e H(0, -2) tem área igual a:

a) 8 u.a. c) 6 u.a. e) 2 u.a.

~~b) 4 u.a.~~ d) 10 u.a.

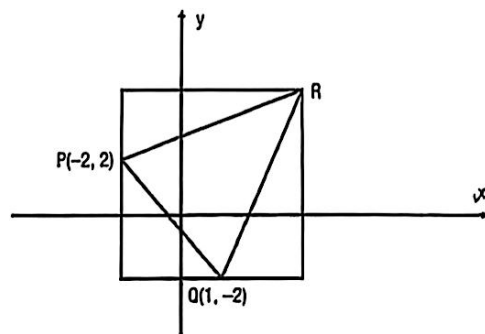
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-2-4) - 0(-2-4) - 2(2-4) - 1(-2-4) - 1(2-4) = 2 + 0 + 4 + 2 + 2 = 10$$

7. (UNIMONTES - MG) A área do pentágono cujos vértices são A(0, 0), B(3, 2), C(2, 3), D(1, 5) e E(-2, 1) é

a) 14,5 b) 10,5 c) 12,5 ~~d) 11,5~~

Handwritten calculations:
 $DP - DQ = 11,5$
 $20 - 7 - 3 = 10$
 $11,5$
 $5 + 7 = 12$
 $12 - 0,5 = 11,5$

8. (UNIFEV - SP) A figura mostra um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e um triângulo PQR que possui dois vértices sobre os lados do quadrado e o vértice R coincidindo com um vértice do quadrado.



Sendo a área do quadrado igual a 36, a área do triângulo PQR vale

a) 18 b) 17 c) 15 d) 14 e) 16

Estudo da reta

Euclides de Alexandria viveu há mais de 2000 anos e é considerado o pai da Geometria. Em sua época, foi o responsável por organizar todo o conhecimento matemático que existia até então. Sua obra, *Os elementos*, só perde em publicações para a Bíblia. O método axiomático como apresentou e desenvolveu os conceitos é até hoje largamente utilizado.

Um de seus postulados diz: "Dois pontos determinam uma reta".



E como seria esse postulado de Euclides na geometria analítica, considerando que um ponto é representado por um par ordenado? Como seria representada uma reta?

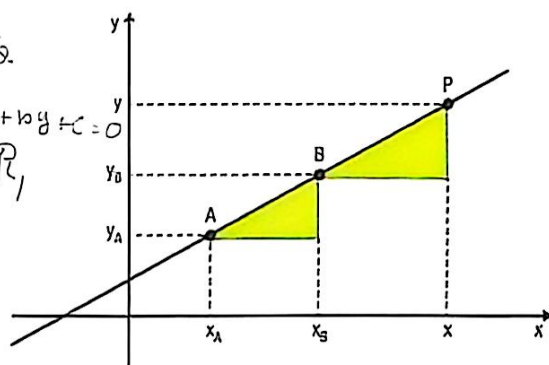
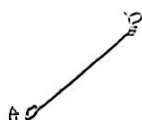


Equação geral da reta

Para responder às perguntas anteriores, vamos considerar uma reta passando por dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Como a reta tem infinitos pontos, qualquer um deles pode ser representado genericamente por $P(x, y)$.

Equação gen. da reta
 Toda equação do tipo $ax + by + c = 0$
 é chamada como E.G.R.,
 $(a, b) \neq 0$

$$y = ax + b$$



Pontos não colineares
 - não são da mesma reta

Como indicamos pontos que pertencem à mesma reta, os dois triângulos retângulos realçados são semelhantes. Assim, temos a proporção:

$$\frac{y - y_B}{y_B - y_A} = \frac{x - x_B}{x_B - x_A}$$

Desenvolvendo essa igualdade, podemos escrever:

$$(y - y_B) \cdot (x_B - x_A) = (y_B - y_A) \cdot (x - x_B)$$

$$x_B y - x_A y - x_B y_B + x_A y_B = y_B x - x_B y_B - y_A x + x_B y_A$$

$$y_A x - y_B x + x_B y - x_A y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

$$(y_A - y_B) \cdot x + (x_B - x_A) \cdot y + (x_A y_B - x_B y_A) = 0$$

$$\text{fazendo } \begin{cases} y_A - y_B = a \\ x_B - x_A = b \\ x_A y_B - x_B y_A = c \end{cases}$$

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Assim, a reta que passa pelos dois pontos pode ser representada por uma equação em x e y . Essa é a equação geral da reta.

Toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com a e b não simultaneamente nulos, é a equação geral de uma reta.

Outra maneira de você chegar à equação geral da reta que passa por dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é aplicar a condição de alinhamento de três pontos, considerando que o terceiro ponto é genérico $P(x, y)$. Assim, temos:

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B & x \\ y & y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0$$

$$xy_A + x_A y_B + x_B y - x_A y - x_B y_A - xy_B = 0$$

$$(y_A - y_B) \cdot x + (x_B - x_A) \cdot y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

$$\begin{cases} y_A - y_B = a \\ x_B - x_A = b \\ x_A y_B - x_B y_A = c \end{cases}$$

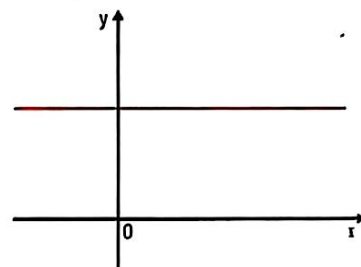
$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Como afirmamos anteriormente, os números reais a e b não podem ser nulos simultaneamente.

Observe o que acontece quando cada coeficiente é nulo.

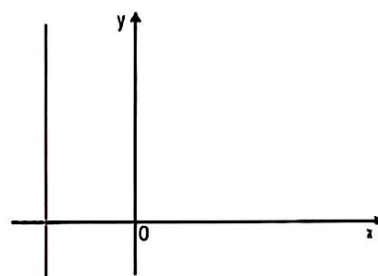
$$a = 0 \text{ e } b \neq 0 \Rightarrow by + c = 0$$

Nesse caso, a reta será paralela ao eixo das abscissas, podendo ser coincidente para $c = 0$.



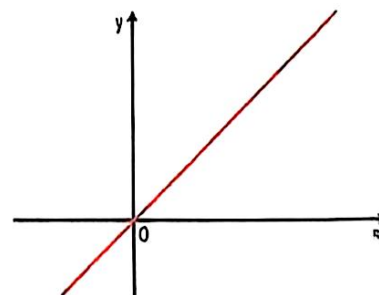
$$b = 0 \text{ e } a \neq 0 \Rightarrow ax + c = 0$$

Nesse caso, a reta será paralela ao eixo das ordenadas, podendo ser coincidente para $c = 0$.



$$c = 0 \text{ e } (a \neq 0 \text{ e } b \neq 0) \Rightarrow ax + by = 0$$

Nesse caso, a reta passará pela origem do sistema de coordenadas cartesianas.





Atividades

1. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos A e B em cada caso.

a) A(3, 4) e B(5, 9)

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 3 & 4 \\ 5 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x + 2 = 5y \\ -5x + 2y = 0 \end{array}$$

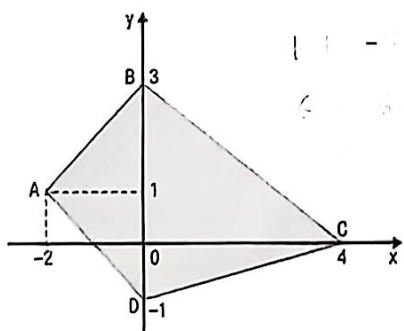
b) A(-2, 2) e B(4, -4)

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} y - 2 = m(x + 2) \\ y - 2 = \frac{-4 - 2}{4 - 2}(x + 2) \\ y - 2 = -3(x + 2) \\ y - 2 = -3x - 6 \\ y = -3x - 4 \end{array}$$

b) Obtenha a equação da reta que contém o lado BC.

c) Obtenha a equação da reta que contém o lado AD.

2. No plano cartesiano, considere o quadrilátero ABCD, conforme a figura a seguir:



a) Obtenha a equação da reta que contém a diagonal AC.

3. Determine os pontos do plano cartesiano em que a reta de equação $2x + 3y - 24 = 0$ intersecta os eixos coordenados.

$$\begin{array}{l} \text{Para } x=0: 3y - 24 = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow (0, 8) \\ \text{Para } y=0: 2x - 24 = 0 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow (12, 0) \end{array}$$

basta resolver um sistema de

equações

4. No plano cartesiano, considere as retas r e s de equações $3x + y - 11 = 0$ e $4x - y - 3 = 0$. Verifique se essas duas retas apresentam algum ponto em comum.

$$\begin{array}{r} 3x + y - 11 \\ 4x - y - 3 \\ \hline 7x - 14 = 0 \\ 7x = 14 \\ x = \frac{14}{7} = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 2 + y - 11 \\ 6 + y - 11 \\ y - 5 = 0 \\ y = 5 \end{array}$$

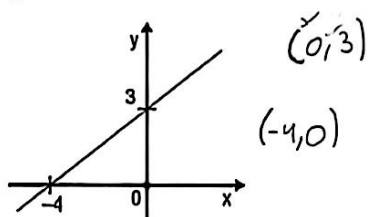
$P(2, 5)$

$$3x + y - 11 = 4 + 5 - 11 = 0$$

6. (PUC-Rio - RJ) O ponto de intersecção entre a reta que passa por $(4, 4)$ e $(2, 5)$ e a reta que passa por $(2, 7)$ e $(4, 3)$ é:

- a) $(3, 5)$ c) $(3, 4)$ e) $\left(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$
b) $(4, 4)$ d) $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$

5. (CESGRANRIO - RJ) A equação da reta mostrada na figura a seguir é



- a) $3x + 4y - 12 = 0$ d) $4x - 3y - 12 = 0$
b) $3x - 4y + 12 = 0$ e) $4x - 3y + 12 = 0$
c) $4x + 3y + 12 = 0$

$$ax + b = 0$$

$$b = 3$$

$$a \cdot (-4) + b = 0$$

$$-4a + b =$$

$$-4a + 3 = 0$$

$$-4a = -3$$

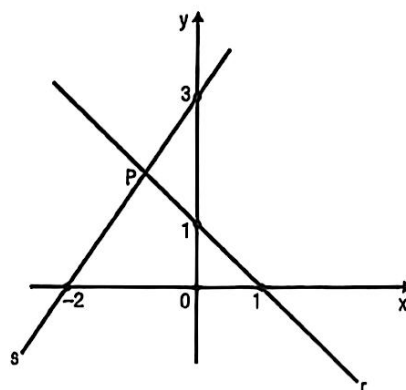
$$a = \frac{3}{4}$$

$$12 + 4y - 3x = 0$$

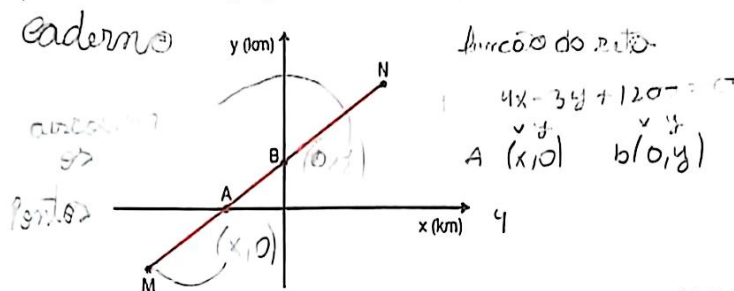
$$-3x + 4y - 12 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} D_b & x & y \\ \hline & 0 & 3 \\ & -4 & 0 \\ \hline & x & y \end{array}$$

7. No plano cartesiano, estão representadas as retas r e s . Determine as coordenadas do ponto P correspondente à intersecção dessas retas.



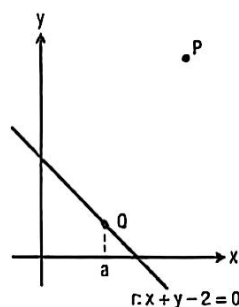
8. (PUC-Campinas – SP) Na figura abaixo tem-se representada, em um sistema de eixos ortogonais, a rota de uma aeronave, de uma cidade M a uma cidade N, passando sobre as pequenas cidades A e B.



Se os quatro pontos pertencem à reta de equação $4x - 3y + 1200 = 0$, a distância entre as cidades A e B, em quilômetros, é de aproximadamente:

- a) 50 d) 5 000
 b) 500 e) 8 000
 c) 800

9. (UFOP – MG) Num sistema de coordenadas cartesianas, localizam-se o ponto $P(3, 4)$ e a reta r de equação $x + y - 2 = 0$. Seja Q o ponto da reta r de abscissa a .



Determine:

- a) A medida do segmento $\overline{PQ}$ em função de a .
 b) O valor de a para que a medida do segmento $\overline{PQ}$ seja a mínima possível, em seguida, o valor desta medida mínima.

(Sugestão: Sendo $m > 0$, $\sqrt{m}$ será mínima quando m for mínimo)

Equação reduzida da reta

Vamos mostrar agora como podemos obter a equação reduzida da reta por meio da equação geral da reta. Considere esta equação geral:

$$x - y - 1 = 0$$

Isolando y , obtemos:

$$x - y - 1 = 0$$

$$-y = -x + 1$$

$$y = x - 1 \rightarrow \text{equação reduzida da reta}$$

- Responda às questões propostas.

- a) Essa equação está escrita na forma de qual tipo de função?

- b) Qual é o gráfico, no plano cartesiano, de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = ax + b$?

- c) Qual é o significado de a em $y = f(x) = ax + b$?

A equação reduzida de uma reta pode ser obtida da equação geral simplesmente isolando-se y num dos membros da igualdade:

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$$

$$\text{fazendo } \begin{cases} -\frac{a}{b} = m \\ -\frac{c}{b} = n \end{cases}$$

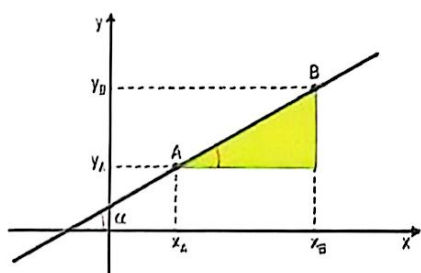
$$y = mx + n$$

A equação de uma reta na forma $y = mx + n$ é denominada equação reduzida da reta.

Na equação reduzida da reta $y = mx + n$, temos as denominações:

- m – coeficiente angular da reta;
- n – coeficiente linear da reta.

Como a própria denominação informa, o coeficiente angular da reta está ligado ao ângulo que essa reta forma com o eixo x no sentido anti-horário (é a taxa de crescimento da função). Assim, considere que a reta que contém os pontos A e B forme, com o eixo das abscissas, um ângulo de medida α , como indicado na figura.



Observando que o ângulo que a reta forma com o eixo x no sentido anti-horário é o mesmo ângulo agudo no triângulo retângulo, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$

Na equação reduzida de uma reta na forma $y = mx + n$, m representa o coeficiente angular, isto é, a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas no sentido anti-horário.

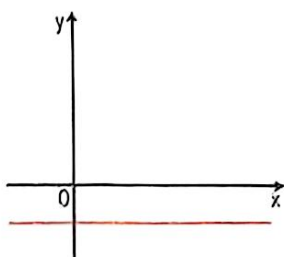
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$

Essa tangente também é conhecida por declividade da reta.

Observação: Sempre que nos referirmos ao ângulo que uma reta forma com o eixo das abscissas, estaremos nos referindo ao ângulo que tem extremidade inicial no eixo e final na reta, sempre no sentido anti-horário.

Existem duas posições da reta em relação ao eixo das abscissas que precisam ser analisadas.

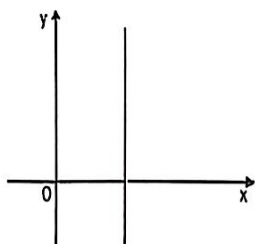
1ª posição: quando a reta é paralela ao eixo das abscissas.



Nesse caso, o ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas é $\alpha = 0^\circ$. O coeficiente angular é igual a zero:

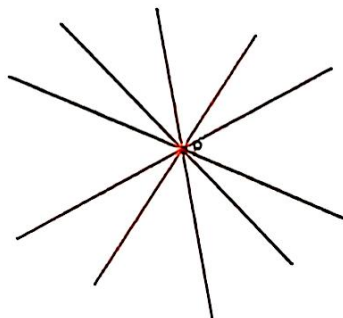
$$m = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

2ª posição: quando a reta é perpendicular ao eixo das abscissas.

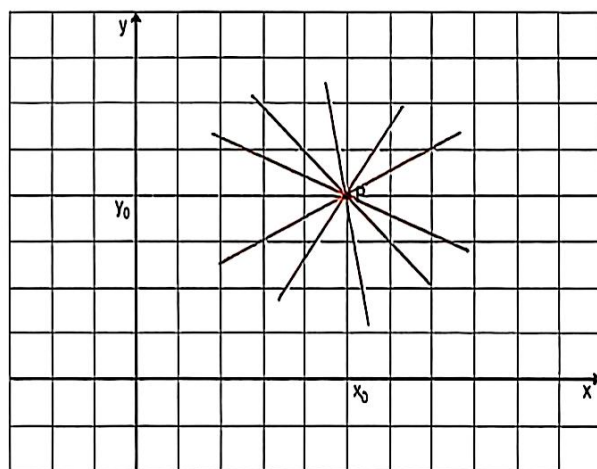


Nesse caso, o ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas é $\alpha = 90^\circ$. O coeficiente angular não é definido, pois não existe tangente de um ângulo reto.

Outro postulado importante da geometria euclidiana informa que, por um ponto, passam infinitas retas. A figura ilustra esse postulado.



Na geometria analítica, o que corresponde a esse postulado é a equação do feixe de retas que passam por um ponto $P(x_0, y_0)$. Acompanhe:



Considerando que qualquer uma dessas retas pode ser representada por

$$y = mx + n \quad (I)$$

Sabendo que o ponto $P(x_0, y_0)$ pertence a essas retas, temos

$$y_0 = mx_0 + n \quad (II)$$

Subtraindo (II) de (I) membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= mx + n - mx_0 - n \\ y - y_0 &= m \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

A equação $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ é conhecida como equação do feixe de retas que passam pelo ponto $P(x_0, y_0)$.

equação da reta: $\rightarrow$ encontrar os valores de m e n
 $f(x) = mx + n$ para descobrir a, b, n

Atividades

1. Dados os pontos A e B, em cada item a seguir, determine o coeficiente angular da reta que passa por esses pontos.

a) A(4, -3) e B(2, -14)

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-14 - (-3)}{2 - 4} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$$

b) A(0, 3) e B(5, 0)

2. Escreva a equação reduzida para cada item.

a) $2x + 3y - 1 = 0$

$$2x + 3y - 1 = 0 \quad a = \frac{2}{3}$$

$$2x - 1 = -3y$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad b = -\frac{1}{3}$$

b) $4x - y - 10 = 0$

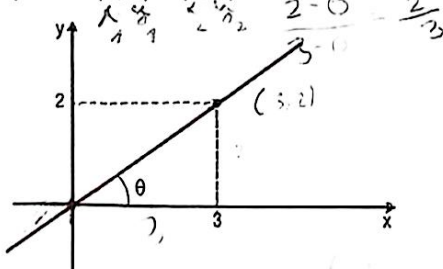
$$4x - 10 = y$$

$$y = 4x - 10$$

$$a = 4$$

$$b = -10$$

3. No plano cartesiano, está representada a reta que passa pelos pontos (3, 2) e (0, 0).



Nessas condições, determine:

- a) o coeficiente angular dessa reta;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{0 - 3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

- b) $\tan \theta$;

$$\tan \theta = \frac{2}{3}$$

- c) a equação reduzida dessa reta.

$$y = ax + b$$

$$2 = 3a + b$$

$$0 = 0 + b$$

$$b = 0$$

$$2 = 3a$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + 0$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

4. Obtenha a equação reduzida da reta que passa pelo ponto A(2, 5) e tem inclinação de 60° com o eixo x.

$$y = ax + b$$

$$5 = 2a + b$$

$$a = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$5 = 2\sqrt{3} + b$$

$$b = 5 - 2\sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}x + 5 - 2\sqrt{3}$$

5. Determine o coeficiente angular (m) e o coeficiente linear (n) das retas cujas equações são:

a) $9x - 2y - 1 = 0$

$$2y = 9x - 1$$

b) $-2x + 5y - 8 = 0$

25
1006
16 20

8. (PUCSP) Determine a equação da reta de coeficiente

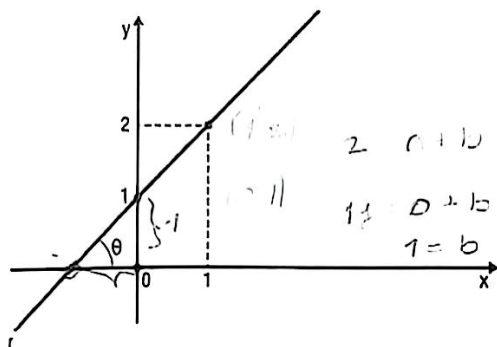
angular igual a $-\frac{4}{5}$ e que passa pelo ponto $P(2, -5)$.

$\frac{4 \cdot 2 - 25}{5} = b$

9. (PUC-Campinas - SP) Na figura abaixo têm-se as retas r e s , concorrentes no ponto $P(1, 3)$.

$\frac{-2 \cdot 1}{5} = b$

No plano cartesiano, está representada a reta r .



a) Obtenha o valor da tangente do ângulo θ .

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{1 - 0} = 1$

$ax + b$

$\text{Tg } \theta = 1$

$\text{Tg } 45^\circ = 1$

$f(x) = x + 1$

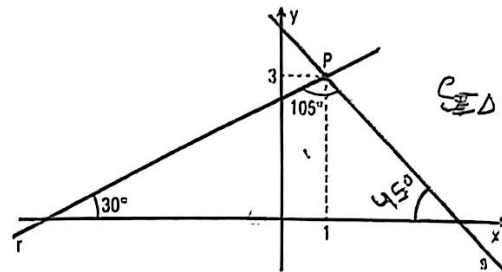
b) Escreva, na forma reduzida, a equação dessa reta.

$f(x) = x + 1$

c) Obtenha as coordenadas do ponto em que essa reta intersecta o eixo das abscissas.

$(0, -1)$

1
1
2
a + 1
= 0



Se os ângulos assinalados têm as medidas indicadas, então a equação da reta:

$\text{Tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{Tg } 45^\circ = 1$

a) r é $\sqrt{3}x + 3y - 6 = 0$

b) s é $x + y + 4 = 0$

c) r é $-\sqrt{3}x + 3y + 6 = 0$

d) s é $x + y - 4 = 0$

e) r é $-\sqrt{3}x + 3y + 9 = 0$

reta r: $\theta = 30^\circ$

$m = \text{Tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$

$y - 3 = \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y - 3 = \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

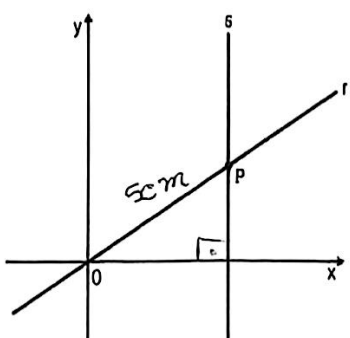
$\frac{y - 3}{1} = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{3}x - \sqrt{3} = 3y - 9$

reta s: $\theta = 45^\circ$

10. (UFF - RJ) Na figura a seguir estão representadas as retas r e s .

$f(x) = ax + b$



7. Considerando que uma reta s passa pelo ponto $A(2, 10)$ e tem coeficiente angular -4 , determine:

a) a equação reduzida dessa reta;

b) o ponto em que a reta intersecta o eixo das abscissas;

c) o ponto em que a reta intersecta o eixo das ordenadas.

Sabendo que a equação da reta s é $x = 3$ e que OP mede 5 cm, a equação de r é:

a) $y = \frac{3x}{4}$

c) $y = \frac{5x}{3}$

e) $y = 4x$

b) $y = \frac{4x}{3}$

d) $y = 3x$

$|s| = x = 3$

$(y - y_0) = m(x - x_0)$
 $y - 0$

11. (UFSCAR – SP) No plano cartesiano, seja r uma reta de equação $ax + 2y - 2 = 0$. Sabendo que $P(1, -1)$ é um ponto de r , determine:

a) o valor de a ;

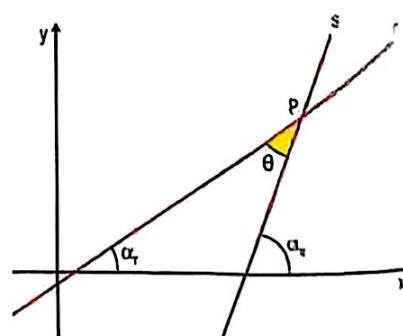
b) o coeficiente angular de r .

Ângulo entre retas

O ângulo entre duas ruas representadas no mapa de uma cidade pode ser determinado com um transferidor. Caso se queira determinar o ângulo entre duas ruas, será necessário usar instrumentos de topografia ou um GPS.



Na geometria analítica, o ângulo entre duas retas concorrentes pode ser determinado por meio das equações dessas retas. Observe as retas r e s representadas no plano cartesiano e o ângulo θ formado pelas duas retas.



Lembrando que a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, temos que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \theta$$

$$\theta = \alpha_1 - \alpha_2$$

Se os ângulos são iguais, suas tangentes também são. Então:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

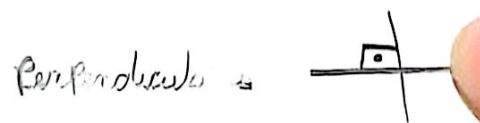
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$

o menor ângulo entre as retas

$$\left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \text{ módulo}$$

Observando que a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas no sentido anti-horário representa o coeficiente angular da reta, temos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$



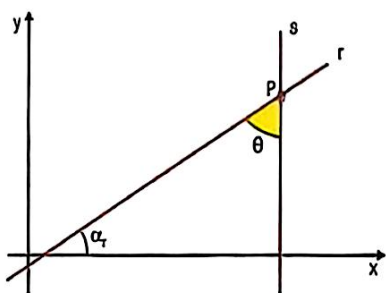
Para calcularmos o ângulo agudo formado pelas duas retas, consideramos o valor da tangente em módulo. retas am formando um ângulo de 90°

O menor ângulo θ formado por duas retas r e s concorrentes no plano cartesiano é tal que:

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right| \text{ módulo}$$

sendo m_r e m_s os coeficientes angulares das retas r e s , respectivamente.

Quando uma das duas retas é vertical, como ilustrado a seguir, temos um caso particular a considerar.



$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right)$$

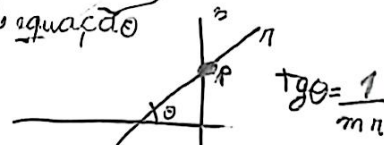
$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{cotg} \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{m_1}$$

$$\operatorname{Tg}(A+B) = \frac{\operatorname{Tg} A + \operatorname{Tg} B}{1 - \operatorname{Tg} A \cdot \operatorname{Tg} B}$$

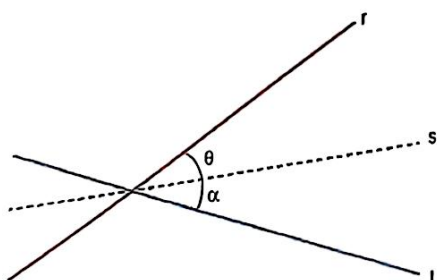
$$= \frac{\operatorname{Tg} A + \operatorname{Tg} B}{1 - \operatorname{Tg} A \cdot \operatorname{Tg} B}$$

duas retas com pontos no eixo -
uma é aplicada um sistema
de equação



Para esse valor em módulo, temos o menor ângulo entre as duas retas.

Uma aplicação interessante da relação que permite calcular o ângulo entre duas retas é a determinação de uma reta simétrica a outra em relação a uma reta dada. Assim, por exemplo, se conhecermos as equações das retas r e s , poderemos obter o coeficiente angular da reta t , simétrica à reta r em relação à reta s .



Observe que:

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_s - m_t}{1 + m_s \cdot m_t} \right|$$

$$\theta = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| = \left| \frac{m_s - m_t}{1 + m_s \cdot m_t} \right|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$


$$\text{Tg}\theta = \left| \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{1}} \right|$$

$$\text{ex. 2}^\circ \text{Tg}\theta = \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{1}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}} \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{3}{3}} \right|$$

Atividades

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

1. No plano cartesiano, foram representadas duas retas r e s de equações:

(r) $3x - y + 7 = 0$ e (s) $2x + y - 5 = 0$

- a) Escreva as equações reduzidas dessas retas.

$$3x + 7 = y \quad 2x - 5 = -y$$

$$\boxed{y = 3x + 7} \quad \boxed{-y = 2x - 5}$$

coef. angular, coef. linear

- b) Determine os coeficientes angulares dessas retas.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$(r) = 3$$

$$(s) = -2$$

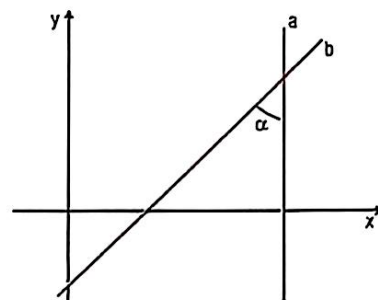
- c) Calcule o menor ângulo formado por essas retas.

$$\text{Tg}\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \quad \text{Tg}\theta = 1$$

$$\text{Tg}\theta = 45^\circ$$

3. O esboço abaixo mostra as retas a e b. Determine a medida do ângulo α considerando que as equações dessas retas são:

(a) $x = 10$ e (b) $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$



4. Obtenha as equações reduzidas de duas retas que passam pela origem do sistema de coordenadas cartesianas e que formam um ângulo de medida 45° com a reta r, cuja equação é $2x + y - 2 = 0$.

2. Determine a medida do menor ângulo formado pelas retas r e s, de equações:

(r) $3\sqrt{3}x - 9y + 5 = 0$ e (s) $5\sqrt{3}x - 5y + 1 = 0$

$$\text{Tg}\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \quad (s) = 5\sqrt{3}x + 1 = 5y$$

$$(r) = \frac{3\sqrt{3}x + 5}{9} = 9y \quad \text{Tg}\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

$$(r) = y = \frac{3\sqrt{3}x}{9} + \frac{5}{9} \quad (s) = y = \frac{5\sqrt{3}x}{5} + \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{9}$$

$m_r = \frac{1\sqrt{3}}{3}$ $n_r = \frac{5}{9}$

$$y = \sqrt{3}x + \frac{1}{5}$$

$m_s = \sqrt{3}$ $n_s = \frac{1}{5}$

$$m_r = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad n_r = \frac{5}{9}$$

$$m_s = \sqrt{3} \quad n_s = \frac{1}{5}$$

5. (UTFPR) O ângulo agudo formado pelas retas concorrentes (r) $y = \frac{3}{2}x - 1$ e (s) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ é

- a) $\arctg\left(\frac{4}{19}\right)$ b) $\arctg\left(\frac{16}{19}\right)$ c) $\arctg\left(\frac{16}{11}\right)$ d) $\arctg\left(\frac{11}{4}\right)$ e) $\arctg\left(\frac{4}{11}\right)$

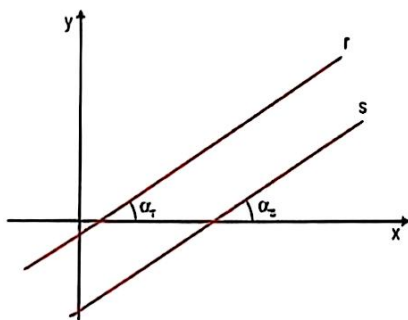
6. Dadas as retas r e s de equações $5x - y + 16 = 0$ e $2x - 3y + 22 = 0$, respectivamente, determine:

-  a) as coordenadas do ponto P que pertence às duas retas;
b) os coeficientes angulares dessas duas retas;
c) a equação da reta t, simétrica de r em relação a s.

Paralelismo e perpendicularidade entre retas

• As retas paralelas possuem o mesmo coef. angular.

- Qual a condição para que duas retas no plano cartesiano sejam paralelas?



Se você respondeu que os ângulos formados entre essas retas e o eixo das abscissas devem ser iguais, acertou. Essa resposta parece ser imediata quando nos baseamos na figura.

Entretanto, sem esboçar as retas no plano cartesiano, como podemos saber se elas são ou não paralelas?

Como os ângulos devem ser iguais, os coeficientes angulares dessas retas deverão ser iguais, isto é:

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \alpha_r \\ \operatorname{tg} \alpha_s &= \operatorname{tg} \alpha_r \\ m_s &= m_r\end{aligned}$$

Para que duas retas não verticais r e s sejam paralelas, devem ter o mesmo coeficiente angular:

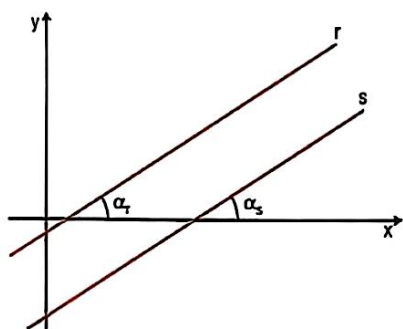
$$m_r = m_s$$

Essa relação é chamada de **condição de paralelismo** entre duas retas. Podemos ter duas retas paralelas entre si que não admitem coeficientes angulares. São as retas perpendiculares ao eixo das abscissas.

Uma aplicação importante da condição de paralelismo entre duas retas é a obtenção da equação que passa por determinado ponto e é paralela a uma reta dada.

- Obtenha a equação da reta s , que passa pelo ponto $P(2, 5)$ e é paralela à reta r , de equação $y = -3x + 7$.

Por meio do ângulo entre duas retas, podemos estabelecer não apenas a condição de paralelismo entre duas retas como também a condição de perpendicularidade.



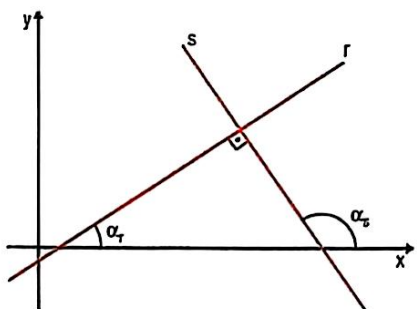
No caso de retas paralelas, basta considerar o ângulo $\theta = 0^\circ$:

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

$$0 = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \Rightarrow 0 = m_s - m_r \Rightarrow m_r = m_s$$

A condição para que duas retas sejam perpendiculares é que o ângulo θ seja igual a 90° ($\theta = 90^\circ$).



$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

A tangente de 90° não existe, portanto, nesse caso, a fração $\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$ não é definida. Para que isso ocorra, o denominador deverá ser igual a zero. Assim, temos:

$$1 + m_s \cdot m_r = 0$$

$$m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Para que duas retas r e s não paralelas aos eixos coordenados sejam perpendiculares, é necessário que

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$



Atividades

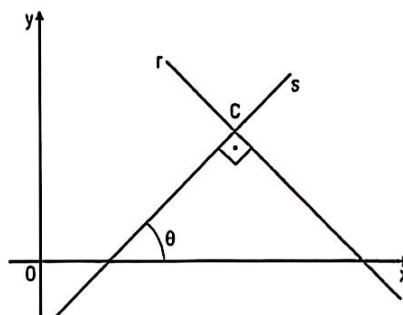
1. Considere a reta r , de equação $y = 3x + 2$. Obtenha a equação da reta s paralela à reta r que passa pelo ponto:

a) $A(2, -4)$

b) $B(0, 6)$

2. Escreva a equação de uma reta r que passa pelo ponto $A(5, 8)$ e é perpendicular à reta s , de equação $4x - y + 5 = 0$.

3. No plano cartesiano a seguir, as retas r e s são perpendiculares e se cruzam em $C(6, 3)$.

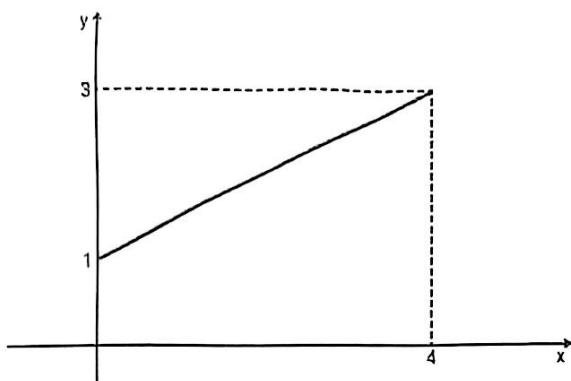


Considerando que $\text{tg } \theta = \frac{5}{4}$, determine:

a) a equação da reta s ;

b) a equação da reta r .

4. Para o segmento de reta representado abaixo, determine:



a) a equação e o coeficiente angular da reta que contém esse segmento;

b) a equação da mediatriz desse segmento, isto é, da reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele.

5. (UFES) A equação da reta que passa pelo ponto $P(2, -3)$ e é paralela à reta que passa pelos pontos $A(4, 1)$ e $B(-2, 2)$ é:

a) $x - 6y + 16 = 0$

d) $2x + 6y + 16 = 0$

b) $x + 6y - 16 = 0$

e) $x + 6y + 16 = 0$

c) $x - 6y - 16 = 0$

6. (FGV – SP) As retas $(r) x + 2y = 5$ e $(s) 4x + ky = 5$ são paralelas se:

a) $k = 8$

b) $k = 7$

c) $k = 6$

d) $k = 5$

e) $k = 4$

7. A reta cuja equação é $2x - 3y + 9 = 0$ corta os eixos coordenados nos pontos P e Q . Nessas condições:

a) obtenha as coordenadas desses pontos;

Importante

b) obtenha as coordenadas do ponto médio do segmento PQ;

c) determine a equação da mediatriz do segmento PQ.

8. (UFPA) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e é perpendicular a uma reta que forma com o sentido positivo do eixo do x um ângulo cuja tangente é $\frac{5}{2}$.

$P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ Perpendicular 

$\left(\text{Tg } \theta = \frac{5}{2}\right)$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$m_2 = \frac{5}{2}$$

$$m_1 = -\frac{1}{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 1 = -\frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y + 1 = -\frac{2x}{5} + \frac{2}{10} : 2$$

$$y + 1 = -\frac{2x}{5} + \frac{1}{5} \rightarrow \frac{y+1}{1} = \frac{-2x+1}{5}$$

9. (FAAP - SP) Ache as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P(-6, 4)$ sobre a reta $4x - 5y + 3 = 0$.

(2) $4x + 3 = 5y$

$$\frac{4x}{5} + \frac{3}{5} = y$$

$$m_2 = \frac{4}{5}$$

$$m_1 = -\frac{1}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{5}{4}(x - (-6))$$

$$\frac{y-4}{1} = \frac{5x}{4} - \frac{30}{4}$$

$$\frac{y-4}{1} = \frac{5x-30}{4}$$

$$4y - 16 = 5x - 30$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$4x - 5y + 3 = 0 \quad .4$$

$$5x + 4y + 14 = 0 \quad .5$$

$$16x - 20y + 12$$

$$25x + 20y + 10$$

$$41x + 82 = 0$$

$$41x = -82$$

$$x = -\frac{82}{41}$$

$$x = -2$$

$$5x + 4y - 16 + 30 = 0$$

$$5x + 4y + 14 = 0$$

reduzindo um sistema de equações

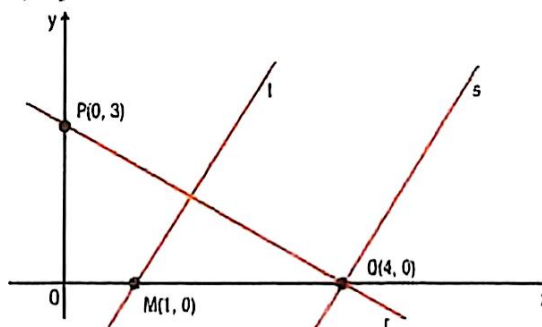
10. (FUVEST - SP) Os pontos de intersecção da reta r, de

equação $y = \frac{x}{2} + 2$, com os eixos de coordenadas de-

terminam um segmento. Qual a equação da mediatriz desse segmento?

11. (FEI - SP) A reta s é perpendicular à reta r e a reta t

é paralela à reta s. Determine a equação da reta s e a equação da reta t.



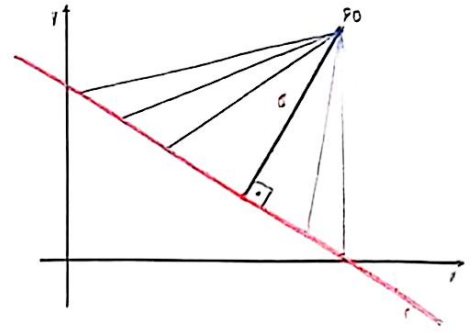
12. (UECE) As retas de equações $y = ax - 4$ e $y = cx + d$

concorrem perpendicularmente no ponto $P(3, 2)$. Calcule o valor do coeficiente d.

Distância de ponto a reta

Definimos distância de um ponto a uma reta como a menor das distâncias entre tal ponto e um ponto da reta.

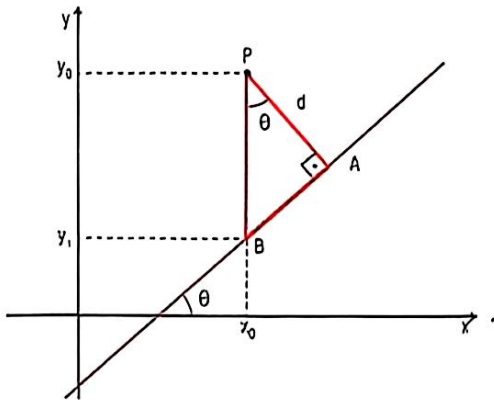
Podemos dizer que é a distância correspondente à medida do segmento de extremidades no ponto P_0 e na projeção ortogonal dele sobre a reta. Ou seja, chamamos de distância de um ponto a uma reta o percurso de menor medida entre o ponto e a reta.



- a) Explique o que é projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta.

- b) Qual é a relação entre os coeficientes angulares das equações da reta dada e da reta perpendicular a ela passando pelo ponto P_0 ?

Para estabelecer a relação matemática que fornece a distância de um ponto a uma reta, por meio das coordenadas desse ponto e também da equação da reta, vamos considerar a ilustração abaixo.



Dados a equação geral da reta $ax + by + c = 0$ e o ponto $P(x_0, y_0)$, utilizando relações trigonométricas no triângulo retângulo destacado em vermelho, temos:

$$\cos \theta = \frac{d}{PB} = \frac{d}{y_0 - y_1} \Rightarrow \sec \theta = \frac{y_0 - y_1}{d}$$

Como $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, temos:

$$\left(\frac{y_0 - y_1}{d} \right)^2 = 1 + \tan^2 \theta \quad (I)$$

Vamos obter o coeficiente angular da reta isolando y na equação geral dada:

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow m = \tan \theta = -\frac{a}{b} \quad (II)$$

Como o ponto B pertence à reta, temos:

$$y_1 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} \quad (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I):

$$\left(\frac{y_0 + \frac{a}{b}x_0 + \frac{c}{b}}{d} \right)^2 = 1 + \left(-\frac{a}{b} \right)^2$$

$$\frac{(by_0 + ax_0 + c)^2}{b^2 d^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$$

$$d^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}}$$

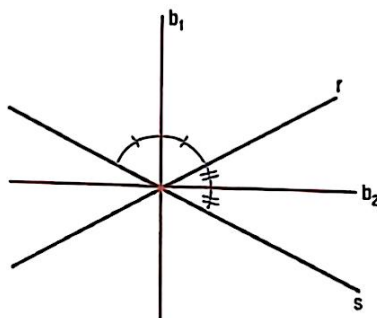
$$d = \frac{\sqrt{(ax_0 + by_0 + c)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ no plano cartesiano a uma reta r de equação $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Na demonstração anterior, não consideramos a distância de um ponto a uma reta vertical ou a uma reta horizontal, ou seja, com equações das formas $ax + c = 0$ ou $by + c = 0$. Para retas verticais, o coeficiente angular não existe e, para retas horizontais, ele é nulo. No entanto, a fórmula obtida continua válida para essas retas.

Você já sabe que a bissetriz divide um ângulo ao meio. Duas retas concorrentes r e s formam quatro ângulos, e os opostos pelo vértice têm a mesma medida. Em relação a essas retas, existem duas bissetrizes b_1 e b_2 , conforme mostra a figura.



Uma propriedade das bissetrizes está relacionada à distância: qualquer ponto da bissetriz de um ângulo formado pelas retas r e s é equidistante dessas retas.

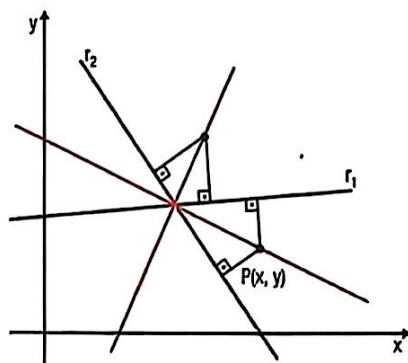
Utilizando essa propriedade, podemos obter as equações das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes.

Sejam r_1 e r_2 duas retas concorrentes cujas equações são:

$$r_1 \rightarrow a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$r_2 \rightarrow a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

qualquer ponto $P(x, y)$ pertencente a qualquer uma das bissetrizes é equidistante das retas r_1 e r_2 .



Utilizando a relação que fornece a distância de ponto a reta, temos:

$$d_{P, r_1} = d_{P, r_2}$$

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right)$$

Na igualdade acima, utilizando o sinal $+$, obtemos a equação da reta correspondente a uma bissetriz e, utilizando o sinal $-$, chegamos à equação da outra.

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$$



Atividades

$a = m \rightarrow$ coeficiente angular

1. Considere uma reta r de equação $3x - 4y + 5 = 0$.
Calcule a distância do ponto A à reta r , sendo:

a) $A(0, 0)$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{25}} = \frac{|0 - 0 + 5|}{5}$$

$$\frac{|0 - 0 + 5|}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$d_{P,r} = 1$$

b) $A(2, -2)$

$$d_{P,r} = \frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$\frac{|6 + 8 + 5|}{\sqrt{25}} = \frac{|19|}{5} = 3,8 \text{ u.c.}$$

b) $P(0, 5)$

$$\frac{|8x - 15y + 7|}{\sqrt{8^2 + (-15)^2}} = \frac{|8 \cdot 0 - 15 \cdot 5 + 7|}{\sqrt{64 + 225}} = \frac{|0 - 75 + 7|}{\sqrt{289}}$$

$$\frac{|0 - 75 + 7|}{\sqrt{289}} = \frac{|-75 + 7|}{17} = \frac{|-68|}{17}$$

$$\frac{68}{17} = 4 \quad \boxed{d_{P,r} = 4}$$

3. Qual deve ser o valor de m para que a distância do ponto $A(-1, 3)$ à reta de equação $12x + 5y + m = 0$ seja igual a 4?

$$d_{P,r} = \frac{|12x + 5y + m|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 4 = \frac{|12(-1) + 5 \cdot 3 + m|}{\sqrt{144 + 25}}$$

$$4 = \frac{|-12 + 15 + m|}{\sqrt{169}} \quad 4 = \frac{|3 + m|}{13}$$

$$\frac{4}{1} \times \frac{13}{13} = \frac{3 + m}{13} \Rightarrow 3 + m = 52$$

$$m = 52 - 3 \rightarrow \boxed{m = 49}$$

2. Calcule a distância do ponto P à reta r , de equação $8x - 15y + 7 = 0$, sendo:

a) P a origem do sistema de coordenadas, $P(0, 0)$

$$\frac{|8x - 15y + 7|}{\sqrt{8^2 + (-15)^2}} = \frac{|8 \cdot 0 - 15 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{64 + 225}}$$

$$\frac{|8 \cdot 0 - 15 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{289}} = \frac{|7|}{17}$$

$$\boxed{d_{P,r} = \frac{7}{17}}$$

4. Calcule o valor de p de modo que a distância do ponto $B(6, -4)$ à reta de equação $8x + 15y + p = 0$ seja igual a 10.

$$\frac{|8x + 15y + p|}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = 10 \Rightarrow \frac{|8 \cdot 6 + 15 \cdot (-4) + p|}{\sqrt{64 + 225}} = 10$$

$$-17$$

5. Considere um triângulo ABC tal que A(2, 4), B(6, 14) e C(2, 1). Determine:

- as equações das retas-suporte dos três lados desse triângulo;
- as medidas das três alturas desse triângulo.

6. As retas r e s de equações $6x - 8y + 5 = 0$ e $3x - 4y - 2 = 0$ são paralelas. Calcule a distância entre elas.

7. (FGV – SP) Os vértices de um triângulo são A(5, 2), B(1, 3) e C(8, -4). Obtenha a medida da altura do triângulo que passa por A.

8. Encontre as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s, sendo dadas as equações:

$$(r) \rightarrow 8x - 6y + 1 = 0$$

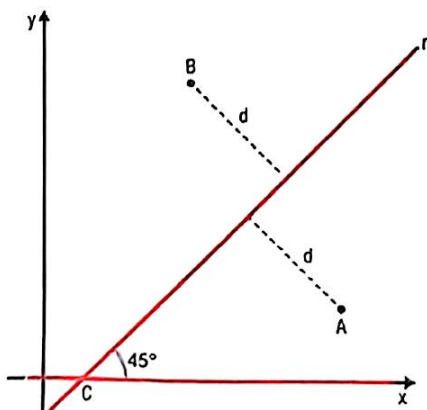
$$(s) \rightarrow 3x - 4y + 5 = 0$$

Para que as distâncias da cidade A e da cidade B até a nova estrada sejam iguais, o ponto C, onde a nova estrada intercepta a existente, deverá ter coordenadas

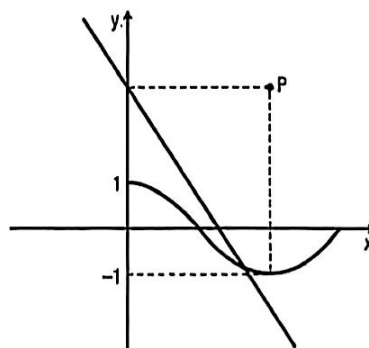
a) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ c) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

b) (1, 0) d) (2, 0)

9. (BMEC – SP) No plano cartesiano da figura, feito fora de escala, o eixo x representa uma estrada já existente, os pontos A(8, 2) e B(3, 6) representam duas cidades e a reta r, de inclinação 45° , representa uma estrada que será construída.



10. (MACKENZIE – SP) No sistema cartesiano ortogonal, a reta $3x + 2y - 6 = 0$ intercepta a curva $y = \cos(x)$, conforme figura. A distância do ponto P à reta dada é



a) $\frac{3\pi}{2\sqrt{13}}$

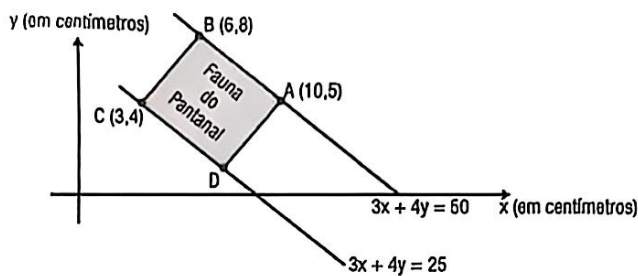
c) $\frac{3\pi+2}{\sqrt{13}}$

e) $\frac{3\pi}{\sqrt{13}}$

b) $\frac{3\pi-2}{\sqrt{13}}$

d) $\frac{3\pi-4}{2\sqrt{13}}$

11. (FGV – SP) A figura mostra uma representação plana da capa de uma edição especial do livro "Fauna do Pantanal".

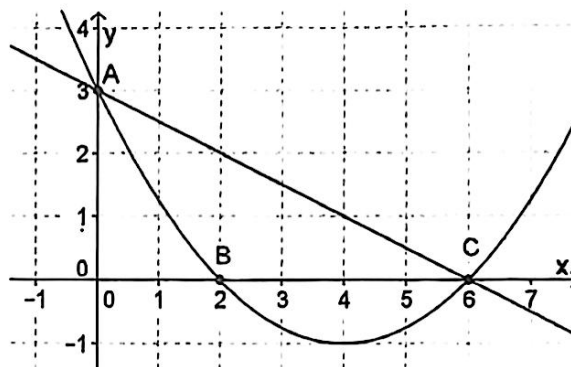


A razão de semelhança entre cada lado da representação e cada lado correspondente da capa real do livro é 20%.

- a) Qual é a distância entre as retas $3x + 4y = 50$ e $3x + 4y = 25$?
- b) Quais são as coordenadas do vértice D?
- c) Qual é o perímetro, na realidade, da capa do livro?
12. (ESPM – SP) Seja $A = (4, 2)$ um ponto do plano cartesiano e sejam B e C os simétricos de A em relação aos eixos coordenados. A equação da reta que passa por A e é perpendicular à reta que passa por B e C é:
- a) $2x - y = 6$ c) $x - y = 2$ e) $x + y = 6$
- b) $x - 2y = 0$ d) $x + 2y = 8$
13. (UEPB) As bases de um trapézio têm como suporte as retas de equações $x - y - 1 = 0$ e $3y - 3x + 5 = 0$. A altura deste trapézio em cm é:

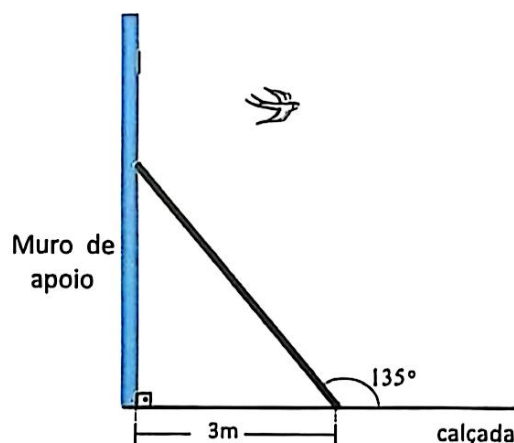
- a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$

14. (ACAFE – SC) Analise a parábola e a reta representada no gráfico abaixo.



Sobre a distância entre o vértice da parábola e a reta que passa pelos pontos A e C, é correto afirmar:

- a) Está entre 1,0 e 2,0 unidades de comprimento.
- b) Está entre 2,0 e 2,5 unidades de comprimento.
- c) É menor que 1 unidade de comprimento.
- d) É maior que 2,5 unidades de comprimento.
15. (UEL – PR) Um pássaro sobrevoa uma rampa conforme mostra a figura. A ave faz seu voo em linha reta e paralela à calçada.



- a) Sabendo-se que a rampa forma um ângulo de 135° com a calçada, conforme mostra a figura, e que a distância do muro de apoio até o pé da rampa é de 3 metros, calcule o comprimento da rampa.
- b) Determine a menor distância entre o pássaro e a rampa no instante em que o pássaro se encontra a 5 metros do muro e a 6 metros da calçada em que se apoia a rampa.

Apresente os cálculos realizados na resolução de cada item.



Nesta unidade, iniciamos o estudo da geometria analítica. Abordamos ponto e reta no plano cartesiano. De acordo com o conteúdo estudado, complete as lacunas ou responda às questões propostas.

- Denominações dos eixos coordenados

Horizontal: _____.

Vertical: _____.

- A expressão $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ permite calcular _____.

- Qual é o procedimento de cálculo para determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento?

- Escreva, no quadro a seguir, a condição de alinhamento dos pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$.

- $ax + by + c = 0$ é a forma _____ da equação da reta.

- $y = mx + n$ é a forma _____ da equação da reta.

- Na equação da reta $y = mx + n$, o valor de m é o _____ e o valor de n é o _____.

- Sendo α a medida do ângulo que uma reta forma com o eixo das abscissas, o significado de $\text{tg } \alpha$ é _____.

- A equação $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ representa _____ que passam pelo ponto _____.

- Duas retas são paralelas quando seus coeficientes angulares _____.

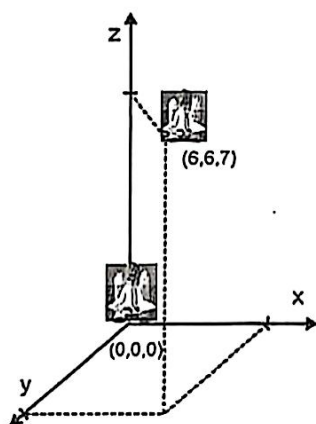
- Se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, as retas de equações $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ são _____.

- A distância do ponto $P(\text{_____})$ à _____ $ax + by + c = 0$ pode ser

obtida pela relação $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1. (ENEM) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.

Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z, então o foguete atingiu a posição



- a) (17, 3, 9) d) (4, 9, -4)
b) (8, 3, 18) e) (3, 8, 18)
c) (6, 18, 3)

2. Na geometria analítica, no plano, a relação

$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ permite calcular a distância entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Se considerarmos os pontos do espaço $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, a relação que possibilita calcular a distância entre esses pontos é

$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Assim, considerando os pontos da questão anterior, a distância do ponto (6, 6, 7) e (0, 0, 0) é:

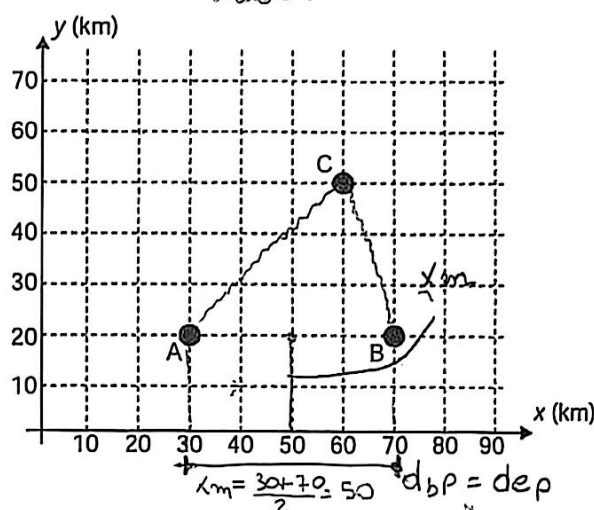
- a) 10 km d) 13 km
b) 11 km e) 14 km
c) 12 km

3. (ENEM) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o

caderno
Volume 9

telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

o não do por balcentro



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

- a) (65; 35). c) (45; 35). e) (50; 30).
b) (53; 30). d) (50; 20).

4. Considerando a questão anterior, imagine que você tenha que determinar a equação da reta que passa pelas antenas B e C. Que equação você obteria?

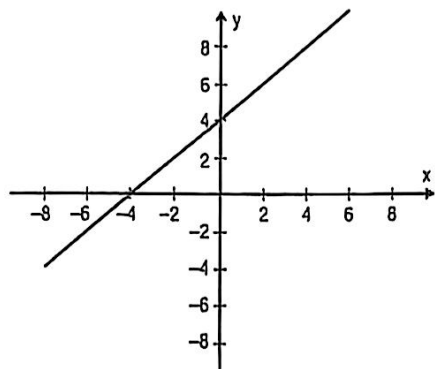
- a) $3x + y - 230 = 0$ d) $x - y - 230 = 0$
b) $x + y - 230 = 0$ e) $3x - y - 230 = 0$
c) $x + 3y - 230 = 0$ equação da reta 2 pontos

5. Ainda com relação à questão 3, qual é a distância, em quilômetros, entre o ponto correspondente à antena A e a reta que passa pelas antenas B e C?

- a) $20\sqrt{10}$ d) $12\sqrt{10}$ e) $10\sqrt{10}$
b) $15\sqrt{10}$ c) $18\sqrt{10}$

A (30, 20)
x y

6. (ENEM) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

- a) $(-5, 0)$.
b) $(-3, 1)$.
c) $(-2, 1)$.
d) $(0, 4)$.
e) $(2, 6)$.

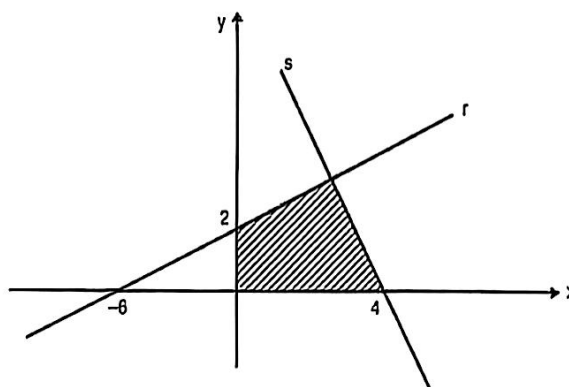
7. No ponto em que a reta $y = x + 4$ da questão anterior intersecta o eixo das ordenadas, passará uma ciclovia perpendicularmente à nova linha do metrô. Indique a alternativa que corresponde à equação dessa reta:

- a) $x - y - 4 = 0$
b) $x + y - 2 = 0$
c) $x - y + 2 = 0$
d) $x + y - 4 = 0$
e) $x + y = 0$

8. (FGV – SP) Considere os pontos $A(3, 2)$ e $B(6, -1)$ do plano cartesiano. Seja P um ponto do eixo das abscissas tal que a reta AP seja perpendicular à reta BP . As abscissas possíveis de P têm por soma o número:

- a) 11
b) 9
c) 12
d) 8
e) 10

9. (ESPM – SP) No plano cartesiano representado abaixo, as retas r e s são perpendiculares. A área da região hachurada vale



- a) 12
b) 15
c) 9
d) 18
e) 6

10. (FURG – RS) Dados os pontos $A(2, 3)$, $B(4, 6)$ e $C(5, 1)$, vértices de um triângulo ABC , considere as seguintes afirmações:

- I. A reta-suporte do lado AB passa na origem.
II. A área do triângulo ABC é igual a 7 unidades de área.
III. O triângulo ABC é isósceles.

Quais afirmações estão corretas?

- a) Apenas a I.
b) Apenas a I e a III.
c) Apenas a II.
d) Apenas a III.
e) Todas.

11. (UEPG – PR) Os pontos $A(1, 1)$, $B(-2, -3)$, $C(2, 0)$ e $D(x, y)$ são os vértices de um losango $ABCD$. Sobre esse losango, assinale o que for correto.

(01) A soma das coordenadas do vértice D é 9.

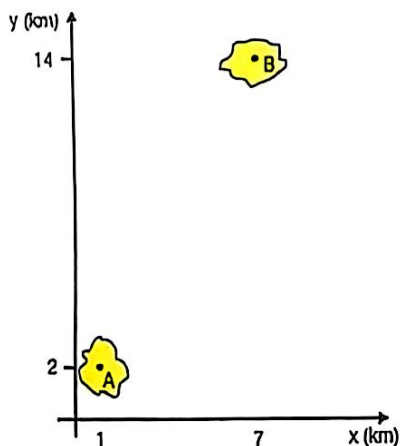
(02) As diagonais se interceptam no ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(04) A reta-suporte da diagonal maior tem equação $x - y - 1 = 0$.

(08) A sua área é 14 u.a.

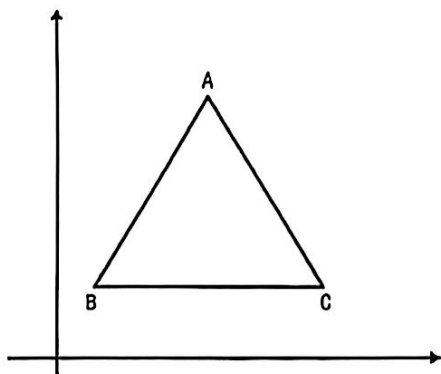
(16) A reta de equação $4x - 3y + 5 = 0$ é perpendicular à reta-suporte do lado AB .

12. (UERJ) Uma ferrovia foi planejada para conter um trecho retilíneo cujos pontos são equidistantes dos centros A e B de dois municípios. Em seu projeto de construção, utilizou-se o plano cartesiano, com coordenadas em quilômetros, em que $A = (1, 2)$ e $B = (7, 14)$. Observe o gráfico:



Determine, utilizando esse sistema referencial, a equação da reta-suporte desse trecho retilíneo da ferrovia.

13. (PUC-Rio – RJ) O triângulo da figura abaixo é equilátero e tem vértices A, B = (2, 4) e C = (8, 4).



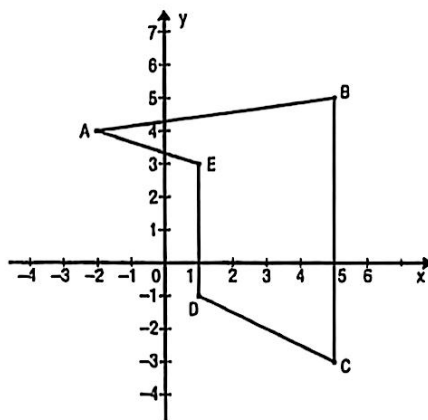
As coordenadas do vértice A são:

- a) $(5, 4 + \sqrt{27})$ d) $(6, \sqrt{27})$
 b) (6, 4) e) $(6, 5 + \sqrt{27})$
 c) (8, 5)
14. (UPE) As retas perpendiculares à reta de equação $3x + 4y - 9 = 0$, que distam 4 unidades da origem, são:
- a) $4x - 3y = 5$ e $4x - 3y = -5$
 b) $4x - 3y = 20$ e $4x - 3y = -20$
 c) $4x - 3y = 4$ e $4x - 3y = -4$
 d) $3x + 4y = 10$ e $3x + 4y = -10$
 e) $4x - 3y = 10$ e $4x - 3y = -10$

15. (FGV – SP) No plano cartesiano, seja P o ponto situado no 1º quadrante e pertencente à reta de equação $y = 3x$. Sabendo que a distância de P à reta de equação $3x + 4y = 0$ é igual a 3, podemos afirmar que a soma das coordenadas de P vale:

a) 5,6 b) 5,2 c) 4,8 d) 4,0 e) 4,4

16. (UFRGS – RS) No pentágono representado no sistema de coordenadas cartesianas abaixo, os vértices possuem coordenadas inteiras.



As retas suporte dos lados AE e BC interceptam-se no ponto

- a) $(5, \frac{4}{3})$ c) $(5, \frac{5}{3})$ e) $(5, \frac{6}{5})$
 b) $(5, \frac{5}{2})$ d) $(5, \frac{5}{4})$

17. (UEM – PR) Considere as retas r, s e t no plano cujas equações são

$$r: x + y = 1,$$

$$s: 2x + y = 0,$$

$$t: x - 2y = 1$$

Sobre essas retas, assinale o que for correto.

- (01) A interseção das retas r e s é o ponto $(-1, 2)$, das retas r e t é o ponto $(1, 0)$ e das retas s e t é o ponto $(1/5, -2/5)$.
 (02) As retas s e t são perpendiculares.
 (04) O ponto de interseção das retas r e t está a uma distância igual a $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ da reta s.
 (08) A área do triângulo delimitado por essas retas é $6/5$.
 (16) A tangente do ângulo agudo formado pelas retas r e s é 3.

Física

Volume 9

